New Scientist

El maravilloso mundo de las matemáticas

Alianza editorial

New Scientist

El maravilloso mundo de las matemáticas

Índice

Colaboradores

Colaboradores internos:

Editor: Richard Webb, redactor jefe de *New Scientist*

Editor de la serie *Instant Expert*: Alison George

Editor de *Instant Expert*: Jeremy Webb

Colaboradores externos:

Richard Elwes es autor de algunas partes del capítulo sobre el infinito y de la sección «El algoritmo que dirige el mundo» del capítulo 8. Es escritor, profesor e investigador en matemáticas, y profesor visitante en la Universidad de Leeds, Reino Unido. Su último libro es *Chaotic Fishponds and Mirror Universes* (2013).

Vicky Neale es la autora del material sobre la conjetura de los números primos gemelos del capítulo 5. Es profesora Whitehead en el Mathematical Institute y en el Balliol College en la Universidad de Oxford, Reino Unido, y autora de *Closing the Gap: The Quest to Understand Prime Numbers* (2017).

Regina Nuzzo es la autora de la sección sobre estadística frecuentista y bayesiana del capítulo 6. Es escritora, estadística y profesora en la

Universidad Gallaudet, Washington DC, Estados Unidos.

Ian Stewart es autor de las secciones sobre el conjunto vacío del capítulo 2 y sobre las matemáticas electorales en el capítulo 8, así como de la conclusión sobre qué hace que las matemáticas sean especiales. Es profesor emérito de la Universidad de Warwick, Reino Unido, y autor de numerosos libros sobre matemáticas, el último de ellos *Calculating the Cosmos* (2017).

Nuestro agradecimiento también a los siguientes autores y editores:

Gilead Amit, Anil Ananthaswamy, Jacob Aron, Michael Brooks, Matthew Chalmers, Catherine de Lange, Marianne Freiberger, Amanda Gefter, Lisa Grossman, Erica Klarreich, Dana Mackenzie, Stephen Ornes, Timothy Revell,

Bruce Schechter, Rachel Thomas, Helen Thomson.

Introducción

En 2014, la iraní Maryam Mirzakhani se convirtió en la primera mujer en obtener la más alta distinción en el campo de las matemáticas, la Medalla Fields. Para ella, las matemáticas eran a menudo como «estar perdida en la selva y tratar de reunir toda la información posible para encontrar nuevas pistas… Con un poco de suerte –agregaba–, es posible encontrar una salida».

Mirzakhani, que murió en julio de 2017 a los 40 años, se adentró en la selva matemática más que la mayoría. Este libro de la serie *New Scientist Instant Expert* está destinado a aquellos que deambulan por el borde en busca de una forma de entrar.

De grado o por fuerza, la mayoría de nosotros se ha hecho una idea del aspecto que tiene el territorio matemático. Hay símbolos, ecuaciones y formas geométricas. Hay problemas con respuestas correctas, verdades que son aparentemente universales y demostraciones que son lógicamente inatacables. Y sobre todo hay números.

Pero ¿qué relación guarda todo esto entre sí? ¿Qué hace que los números y las matemáticas sean especiales, y que algunos números y algunas partes de las matemáticas sean más especiales que otros? El tema es demasiado amplio como para aspirar a ofrecer aquí una visión completa, pero apoyándonos en el pensamiento de investigadores de primera línea y en lo mejor de *New Scientist* esperamos dar una idea.

Tras una breve introducción a la naturaleza y el ámbito de las matemáticas, comenzamos por donde todo comenzó: por las fascinantes propiedades de los números. Primero consideramos el cero y el infinito, los números primos y los inevitables bichos raros que son los «números trascendentes» e y π y la unidad imaginaria i. Tras una breve digresión por los problemas de la probabilidad y la estadística, llegamos a la vanguardia de los métodos matemáticos modernos y a ejemplos de cómo se aplican a áreas inesperadas de nuestras vidas, para considerar después el problema más profundo de todos: el de la relación que guardan exactamente las matemáticas con la realidad

Para muchas personas ajenas a este campo, la maravilla de las matemáticas estriba en que parecen ser un lenguaje universal que nos ayuda a comprender mejor el mundo. Muchos profesionales de las matemáticas estarían de acuerdo con esta apreciación, pero añadirían que su belleza radica en cómo, a partir de bases muy simples y utilizando solo las herramientas de la lógica abstracta más pura, se pueden crear mundos que parecen ir más allá del nuestro.

Mirzakhani estudió la geometría de una cosa llamada el espacio de móduli, que se puede concebir como un universo en el que cada punto es en sí mismo un universo. Y describió el número de formas en que un rayo de luz puede viajar por un bucle cerrado en un universo bidimensional, una solución que no se puede encontrar si uno se queda en su universo «de origen», sino solo haciendo un zoom hacia atrás y navegando por un multiverso completo.

Todo esto va más allá de lo que la mayoría de nosotros podemos aspirar a entender. Pero espero que el libro proporcione al lector un agradable viaje de descubrimiento matemático o, como mínimo, un camino de entrada.

Richard Webb, editor

1. ¿Qué son las matemáticas?

¿En qué consisten las matemáticas? ¿Son una invención o un descubrimiento? ¿Es algo que nos viene de forma natural o tenemos que aprenderlas? En torno al verdadero carácter de las matemáticas quedan muchas cuestiones por resolver…

Los pilares de las matemáticas

Para la mayoría de nosotros, las matemáticas significan números. La manipulación de los números es ciertamente el lugar donde comenzó el viaje matemático de la humanidad. Pero sobre esa base hemos construido un edificio formidable, un edificio mucho más grande.

La *aritmética* es lo que todos sabemos: suma, resta, división, multiplicación, etc. La capacidad de comprender y manejar los números en abstracto fue la parte de las matemáticas que primero se comenzó a desarrollar, formalmente hace ya más de seis milenios. Pero fue solo a partir de mediados del siglo XIX, con el desarrollo de la teoría de conjuntos, cuando se establecieron reglas lógicas estrictas para la manipulación aritmética.

Del desarrollo de la teoría de conjuntos se ocupan los capítulos 2 y 3, sobre el cero y el infinito, mientras que a los números se dedican los capítulos 4 y 5, que tratan de los números primos –los átomos del sistema numérico– y de otros números especialmente intrigantes como π, ϕ, *e* e *i*.

La *teoría de la probabilidad,* desarrollada a partir del siglo XVII, se basa en las reglas de la aritmética para crear un conjunto de leyes con que tratar el azar y la incertidumbre, omnipresentes en el mundo que nos rodea. Aplicada en origen a los juegos de azar, adquirió nueva importancia en el siglo XX con la aplicación de métodos estadísticos al análisis de grandes conjuntos de datos, así como con el desarrollo de la teoría cuántica, que sugiere que la realidad misma está gobernada por el azar.

La probabilidad y la estadística son el tema del capítulo 6, y sobre la relación con la teoría cuántica se proporciona más información en el capítulo 9, dedicado a la relación entre los números y la realidad.

Más allá de la manipulación de los números está la matemática «superior», que tiene tres pilares principales:

1. La *geometría* es probablemente el más familiar. Comienza con un sentido del espacio: la geometría formal codifica los principios para describir de qué manera se pueden relacionar entre sí las cosas en el espacio, por ejemplo para formar un triángulo. Pero es una descripción estática.
2. El *análisis* es el segundo pilar de las matemáticas superiores. Se ocupa de cosas que se mueven y cambian en el tiempo. Incluye en especial el cálculo integral y diferencial, junto con muchas otras sofisticadas variaciones sobre el tema.
3. El *álgebra* nos permite representar y manipular el conocimiento mediante números, símbolos y ecuaciones, y como tal es el pilar más ancho de las matemáticas superiores formales. Abarca temas abstrusos como la teoría de grupos (conjuntos de elementos que satisfacen ciertas propiedades), la teoría de grafos (que estudia cómo están interconectadas las cosas, por ejemplo los ordenadores en Internet o las neuronas en el cerebro) y la topología (las matemáticas de las formas que se pueden deformar continuamente, sin romperlas ni cambiarlas).

Aunque cada una de estas disciplinas expansivas merecería por sí sola un libro entero, este que tiene el lector en sus manos le permitirá entrever las perspectivas que abren y los problemas que plantean, sobre todo los capítulos 7 y 8, que tratan de los grandes problemas no resueltos de las matemáticas y la aplicación de estas a los problemas del mundo cotidiano.

Pero antes de nada vamos a centrar la atención en una de las cuestiones filosóficas más difíciles de las matemáticas: ¿de dónde provienen?

Las matemáticas: ¿invención o descubrimiento?

Cada vez que corremos para atrapar una pelota o conducimos en medio del tráfico, hacemos, de manera completamente inconsciente, matemáticas. Lo cual tiene sentido. El mundo natural es un lugar complejo e impredecible. Los hábitats cambian, los depredadores atacan, la comida se agota. La supervivencia de un organismo depende de su capacidad para comprender el entorno, ya sea contando hasta la caída de la noche, triangulando la forma más rápida de eludir el peligro o evaluando los lugares con más probabilidad de encontrar alimento. Eso significa hacer matemáticas: manipular números, evaluar la posición y el movimiento con ayuda de la trigonometría y el cálculo infinitesimal y sopesar probabilidades.

Ello apunta a una verdad profunda y difícil de precisar: la realidad es en cierto sentido matemática. Karl Friston, neurocientífico computacional y físico del University College London, observa que en las matemáticas hay simplicidad, parsimonia y simetría. Consideradas como lenguaje, ganarían de calle frente a todas las demás formas de describir el mundo.

Consecuencia inmediata de ello es que no somos los únicos organismos con aptitudes «matemáticas». Desde los delfines hasta los mohos mucilaginosos, todos los organismos del árbol evolutivo parecen analizar matemáticamente el mundo, descifrando sus patrones y regularidades para sobrevivir. Si el entorno se desarrolla de acuerdo con principios matemáticos, argumenta Friston, entonces la anatomía del cerebro tiene también que recoger esos principios matemáticos.

Pero el cerebro humano, con su capacidad aparentemente única para la representación simbólica y el pensamiento abstracto, ha llevado las cosas más lejos. Hemos hecho de las matemáticas una actividad consciente que, en mayor o menor medida, ha de aprenderse. El momento exacto en que la cultura transformó nuestros sentidos instintivos en una aptitud matemática consciente y reconocible se pierde en la noche de los tiempos, pero en la década de 1970 los arqueólogos que investigaban el yacimiento de Border Cave, en la ladera occidental de la cordillera Lebombo, en Sudáfrica, descubrieron una serie de huesos con muescas, entre ellos un peroné de babuino con 29 marcas de ese tipo. Estos huesos con muescas, de unos 40 000 años de antigüedad, parecen haber servido para contar: son la prueba más antigua que tenemos de una emergente comprensión consciente de la representación y manipulación de números.

Los sistemas de contar y medir alcanzaron nuevas cotas en el cuarto milenio a. C. en la sofisticada cultura mesopotámica de los valles del Tigris y el Éufrates. Aquí, en lo que hoy es Iraq, se utilizaron las primeras representaciones simbólicas y sistemáticas de números para llevar el registro de días, meses y años, medir superficies de tierra y cantidades de grano, y tal vez incluso registrar pesos. A medida que los humanos se adentraron en los mares y estudiaron los cielos comenzaron a desarrollar métodos numéricos para la navegación y el seguimiento de objetos celestes.

Esta matemática consciente fue producto de la necesidad cultural: una invención que ayudó a comprender el mundo y llevar a cabo cosas como el comercio y los viajes. Con ayuda de herramientas matemáticas hemos construido, durante los últimos seis mil años, una enorme pirámide de conocimiento matemático. Los matemáticos de la antigua Grecia, como Euclides, formalizaron las reglas de la geometría (véase la figura 1.1) alrededor de 300 a. C. Más o menos mil años más tarde los matemáticos indios y árabes comenzaron a crear los sistemas numéricos con los que estamos familiarizados hoy día, así como a desarrollar herramientas para la representación simbólica y la manipulación de cantidades numéricas: el álgebra.

Pero ni siquiera el gran florecimiento de las matemáticas modernas en la era de la Ilustración del siglo XVII sirvió para otra cosa que para ahondar nuestra comprensión de las cosas dentro del ámbito de la experiencia. El cálculo infinitesimal de Isaac Newton y Gottfried Leibniz, por ejemplo, hizo posible calcular la trayectoria de los cuerpos en movimiento en la Tierra y en los cielos. El sistema de coordenadas inventado por René Descartes proporcionó una representación algebraica de las formas geométricas. Y las teorías emergentes del azar y la probabilidad nos ayudaron a manejar la incertidumbre y la falta de información.

Desde entonces, sin embargo, las matemáticas se han ido expandiendo a dominios cada vez más abstractos y nos han dicho cosas que no podríamos haber esperado comprender mediante la sola observación. Y al hacerlo, han ido adquiriendo cada vez más el carácter de una verdad revelada, de un descubrimiento a la espera de ser hecho, en contraposición a algo inventado, a un puro producto del cerebro humano.

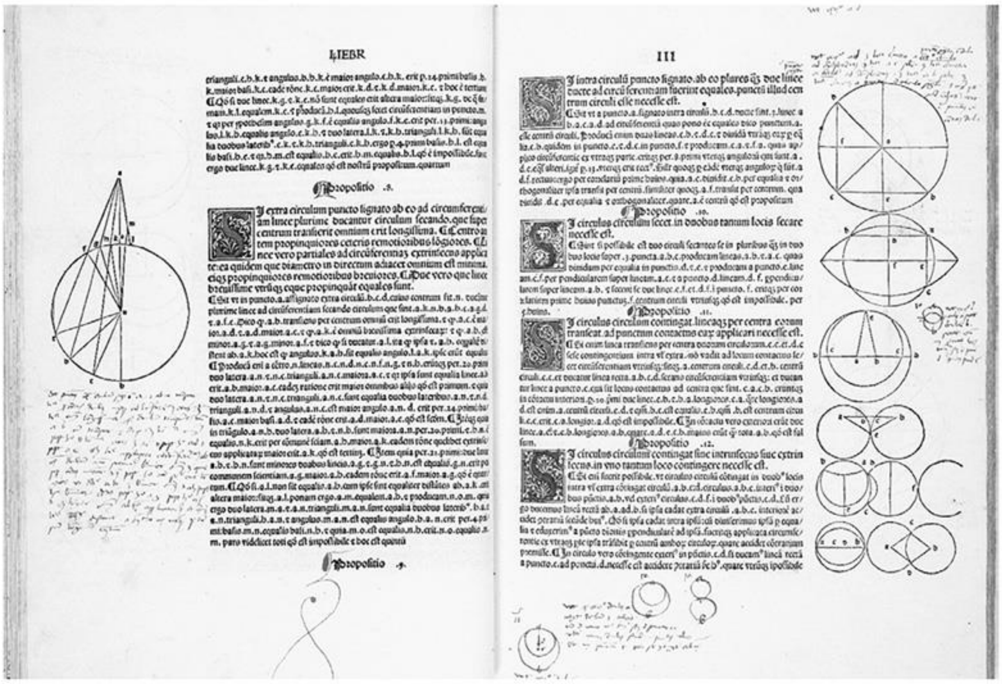


Figura 1.1 Los *Elementos* de Euclides (aquí en su primera edición impresa de 1482) fue un tratado seminal de geometría.

Así, por ejemplo, cuando a comienzos del siglo XX el matemático David Hilbert extendió el álgebra del espacio 3D convencional a otro de infinitas dimensiones, aquello parecía un desarrollo puramente abstracto con poca aplicación al mundo real. Pero un par de décadas más tarde resultó que el estado de una partícula cuántica como mejor se podía describir era utilizando uno de esos «espacios de

Hilbert». Las matemáticas subyacentes siguen siendo clave para los intentos de dar sentido a la mecánica cuántica, una teoría de la que todavía no tenemos una comprensión física intuitiva.

Para muchos físicos de hoy día, el éxito de las matemáticas como lenguaje para describir la realidad apunta al papel primordial que tienen en la organización del universo. Otros no van tan lejos y argumentan que seguimos inventando las matemáticas para satisfacer nuestra necesidad de describir el mundo de manera diferente en diferentes contextos.

Consideremos la siguiente secuencia de acontecimientos. El más famoso de los axiomas geométricos establecidos por Euclides dice que dos rectas paralelas nunca se encuentran. Pero en la superficie curva del globo, por ejemplo, las rectas paralelas sí se encuentran: todos los meridianos convergen en los Polos Norte y Sur. La exploración de tales geometrías no euclidianas por el matemático alemán Bernhard Riemann y otros condujo al descubrimiento –o la invención– de una rica veta de las matemáticas que Einstein utilizaría para formular su teoría de la relatividad general. La deformación del espacio-tiempo por cuerpos masivos en la relatividad general se rige por las reglas de la geometría de Riemann, no por las de la geometría euclidiana.

Para Andy Clark, filósofo cognitivo de la Universidad de Edimburgo, el universo está lleno de todo tipo de patrones y regularidades y formas de comportamiento, de manera que cualquier criatura que quiera construir una matemática tendrá que construirla sobre las regularidades que constriñen el comportamiento de las cosas que encuentra a su paso. Siguiendo esta lógica, si las matemáticas son un principio de organización, entonces son un principio que nosotros imponemos al mundo.

Los teoremas de incompletitud de Gödel –una parcela de las matemáticas que paradójicamente es bastante precisa, desarrollada por el matemático austriaco Kurt Gödel en la década de 1930– muestran que siempre habrá preguntas para cuya respuesta las matemáticas nunca tendrán las herramientas necesarias (véase el capítulo 3), lo cual también sugiere que es demasiado pronto para hacer afirmaciones radicales en el sentido de que las matemáticas son una verdad universal. Sobre estas ideas volveremos al final del libro, pero entre tanto diremos que estamos muy lejos de lo que los matemáticos considerarían como una prueba en un sentido u otro.

Nuestros cerebros matemáticos

Todos tenemos una aptitud innata para hacer inconscientemente alguna forma de matemáticas que nos permite movernos por el mundo y sobrevivir. Pero el origen de la capacidad para manejar números es una cuestión más intrigante. ¿Es aprendida o tiene que ver con algo innato? Al fin y al cabo, contar el número de cosas no tiene ningún valor de supervivencia evidente.

Ya en 1997 el psicólogo cognitivo Stanislas Dehaene propuso la teoría de que nacemos con un sentido consciente de los números, igual que somos conscientes de los colores: la evolución ha dotado a los humanos y otros animales de «numerosidad», es decir, la capacidad de percibir inmediatamente el número de objetos en un montón. Tres canicas rojas producirían una sensación del número tres, del mismo modo que producirían la sensación del color rojo.

En seguida comenzaron a acumularse pruebas en apoyo de esta concepción «innatista» de la aptitud numérica, con experimentos que demostraban, por ejemplo, que los bebés de seis meses eran capaces de distinguir entre configuraciones con diferente número de puntos. Otros estudios sugirieron que los humanos nacemos con una línea numérica mental innata, es decir, que de manera instintiva representamos los números espacialmente, con valores que aumentan de izquierda a derecha. Y algunos experimentos que aparentemente demostraban que otros animales, desde chimpancés hasta pollos, eran capaces de distinguir números pequeños parecían aportar aún más pruebas a favor de esa tesis.

El desarrollo de los números

40 000 a. C.
Los huesos con muescas hallados en Sudáfrica son el primer indicio de conteo en la humanidad.

4 000 a. C.
Los calendarios de Egipto y Mesopotamia (hoy Iraq) indican que estas civilizaciones llevaban la cuenta del paso del tiempo.

250 a. C.
Arquímedes calcula el volumen de la esfera y del cilindro y da un valor aproximado de π.

230 a. C.
Eratóstenes de Cirene inventa el método de la criba para determinar qué números son primos.

***c.* 1 a. C.**
El matemático chino Liu Hsin utiliza fracciones decimales.

600 a. C.
En la actual India se utiliza la notación decimal para los números.

1450
Nicolás de Cusa efectúa algunos de los primeros estudios sobre el infinito.

1564
Gerolamo Cardano, matemático y jugador empedernido, escribe un libro sobre cómo funcionan los juegos de azar.

1572
Rafael Bombelli establece reglas para el manejo de los números complejos.

1614
John Napier introduce los logaritmos.

1637
René Descartes aplica el álgebra a la geometría e introduce las coordenadas cartesianas.

3 000 a. C.
Surge en Mesopotamia el primer sistema numérico reconocible.

1 750 a. C.
Los babilonios resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas y compilan tablas de raíces cuadradas y cúbicas.

530 a. C.
Pitágoras de Samos demuestra el teorema que lleva su nombre sobre la longitud de los lados de un triángulo rectángulo.

300 a. C.
Euclides escribe los *Elementos,* que entre otras cosas es un extenso tratado de geometría.

628 a. C.
El matemático indio Brahmagupta escribe *Brahmasphutasiddhanta,* donde se introducen los números negativos y el primer cero numérico.

810 a. C.
El matemático árabe al-Juarismi introduce el término «álgebra» y da su nombre a la palabra «algoritmo».

1072
Omar Jayam calcula la duración del año en 365,24219858156 días, un valor asombrosamente preciso.

1202
Fibonacci (Leonardo de Pisa) escribe el *Liber abaci,* introduciendo la aritmética y el álgebra árabes entre los europeos.

1647
Pierre de Fermat enuncia su misterioso último teorema, que no fue demostrado hasta 1994.

1664
Fermat y Blaise Pascal intercambian correspondencia en la que empiezan a esbozar las leyes de la probabilidad.

El desarrollo de los números

1687
Isaac Newton publica sus *Philosophiae naturalis principia mathematica (Los principios matemáticos de la filosofía natural)*, donde expone sus teorías del movimiento y la gravedad.

1727
Leonhard Euler introduce el símbolo *e* para la base de los logaritmos naturales.

1859
Bernhard Riemann establece la hipótesis, aún no probada, sobre la distribución de los números primos.

1874
Georg Cantor publica su primer trabajo sobre la teoría de conjuntos, definiendo rigurosamente el infinito por primera vez.

1889
Giuseppe Peano establece axiomas lógicos para el manejo de los números naturales.

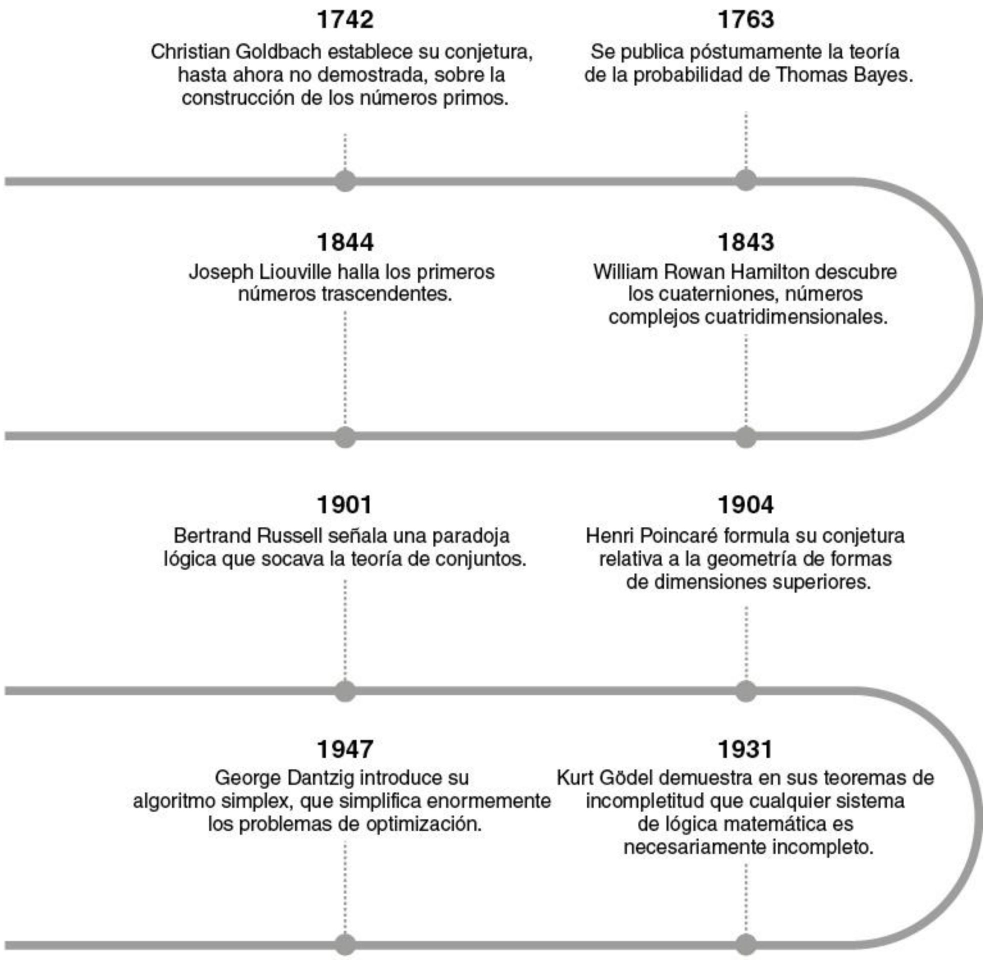
1899
David Hilbert suministra una base lógica similar para la geometría.

1971
Stephen Cook formula el problema P = NP? de la complejidad computacional.

1975
Benoit Mandelbrot describe su teoría de los fractales.

1994
Andrew Wiles demuestra el último teorema de Fermat.

2002
Grigori Perelman demuestra la conjetura de Poincaré.



Pero no pasó mucho tiempo antes de que algunos investigadores empezaran a sentirse incómodos con las conclusiones de estos estudios. Podía ser, por ejemplo, que la capacidad de distinguir entre distintas configuraciones de puntos se basara, no en el número, sino en otros atributos, como su distribución espacial o la superficie cubierta. Tali Leibovich, de la Universidad de Haifa, en Israel, señala que tiene sentido haber adquirido por evolución la capacidad de evaluar cosas como esas: si estás cazando o te están cazando, tienes que actuar rápidamente, lo cual requiere utilizar todas las señales disponibles.

En seguida surgió una hipótesis diferente: que en lugar de nacer con un sentido innato de los números, nacemos con un sentido de ciertas magnitudes –

como el tamaño y la densidad– que se correlacionan con el número de cosas, y que nuestra aptitud matemática consciente se basa en ello. «Desarrollar y comprender esta correlación requiere tiempo y experiencia», dice Leibovich.

Pruebas más refinadas realizadas con niños tienden a apoyar esta idea. Los niños menores de cuatro años no pueden entender que cinco naranjas y cinco sandías tienen algo en común: el número 5. Para ellos, un montón de sandías simplemente es «más» que el mismo número de naranjas.

Las observaciones realizadas en diferentes culturas humanas aportan pruebas adicionales. El pueblo yupno de Papúa Nueva Guinea tiene una lengua compleja que incluye sutiles pronombres demostrativos para indicar que algo es físicamente más alto o más bajo que el hablante, cuántas cosas hay y cómo de cerca o lejos están. El inglés, por el contrario, tiene solo cuatro demostrativos: *this, that, these* y *those,* y el castellano quince: esa(s), ese, eso(s), esta(s), este, esto(s), aquel, aquella(s), aquello(s). Pero los yupno no usan la recta numérica mental supuestamente universal, ni tienen en su lengua comparativos para decir que algo es más grande o más pequeño. Rafael Núñez, de la Universidad de California en San Diego, que ha estudiado la cultura yupno durante muchos años, dice que no se trata solo de la falta de cuantificación exacta, sino que carecen también de propiedades gramaticales para apoyar algo tan simple como una comparación de tamaños o pesos.

Núñez cita también un estudio de 189 lenguas aborígenes australianas, de las cuales tres cuartas partes se comprobó que no tienen términos para designar números superiores al 3 o el 4, mientras que otras 21 no pasan del 5. En opinión de Núñez, esto sugiere que la numerosidad exacta no es innata, sino un rasgo cultural que surge cuando las circunstancias, como la agricultura y el comercio, lo requieren: «Cientos de miles de humanos que poseen una lengua, a veces una lengua muy complicada y sofisticada, no tienen una cuantificación exacta», dice.

Y desde luego hay personas que aprenden la numerosidad mejor que otras. En 2016, Dehaene publicó los resultados del análisis del escáner cerebral de 15 matemáticos profesionales y 15 no matemáticos de capacidad académica equivalente. Halló que cuando los matemáticos reflexionaban sobre problemas de álgebra, geometría y topología se activaba una red de regiones cerebrales involucradas en el pensamiento matemático, que en cambio no se activaba cuando pensaban en problemas de otra índole. En los no matemáticos no se observó ninguna diferencia de este tipo.

Un aspecto crucial es que esta «red matemática» no se traslapa con las regiones cerebrales involucradas en el lenguaje, lo que sugiere que una vez que los matemáticamente dotados desarrollan y aprenden el lenguaje para manipular símbolos, comienzan a pensar de una manera en la que no interviene el lenguaje normal. Para Friston, es como si estas personas pudieran descargar una intuición en otro mundo, el mundo de las matemáticas, y luego dieran un paso atrás y dejaran que este mundo les hablara. Esa aptitud probablemente se basa en muchas otras cosas: lenguaje para comunicar conceptos, memoria de trabajo para mantener y manipular conceptos, e incluso control cognitivo para superar los sesgos innatos en nuestro cerebro.

Cuando las matemáticas fallan

Como producto que son de los procesos aleatorios de la selección natural, nuestros modelos matemáticos inconscientes del mundo, vistos desde el punto de vista de las matemáticas conscientes, no son perfectos. A veces dan prioridad a la supervivencia a expensas de la precisión: una fuente de todo tipo de comunes trampas matemáticas.

He ahí una de las razones, por ejemplo, de que nos resulte tan difícil evaluar probabilidades. Tendemos a exagerar las estimaciones del riesgo –más vale prevenir que curar– y a ver patrones donde no los hay. Es lo que se esconde detrás de cosas como la falacia del jugador, la creencia errónea de que si la bola de la ruleta aterriza varias veces seguidas en rojo, lo más seguro es apostar al negro (véase el capítulo 8).

O pensemos en el efecto Weber-Fechner, que rige la respuesta a estímulos externos: la capacidad de discriminar entre sensaciones disminuye a medida que aumenta su magnitud. Por ejemplo, mientras que es fácil distinguir entre un peso de 2 kg y otro de 1 kg, no lo es tanto apreciar la diferencia entre dos pesos de 22 y 21 kg. Algo parecido es aplicable al brillo de una luz, al volumen de un sonido e incluso a la cantidad de objetos que vemos.

Hay experimentos que demuestran que estos defectos innatos son compartidos por otros animales, pero hasta ahora solo los humanos hemos desarrollado la capacidad de identificarlos, y posiblemente subsanarlos, en la forma de matemáticas conscientes.

Cómo discurrir en matemáticas

¿Cómo discurren los profesionales de las matemáticas cuando piensan matemáticamente? Ian Stewart, de la Universidad de Warwick (Reino Unido), ve su disciplina como algo parecido a un lenguaje, pero un lenguaje que, gracias a su lógica inherente, se escribe él mismo: «Puedes empezar a escribir cosas sin saber exactamente qué son, y el lenguaje te va haciendo sugerencias», dice Stewart. Adquiriendo un dominio suficiente de los fundamentos, se entra enseguida en lo que los deportistas llaman «la zona». En ese estado –como ha comprobado Stewart– las cosas se hacen mucho más fáciles y te sientes como propulsado hacia adelante.

Pero ¿qué ocurre si careces de esa impulsión matemática? Según el matemático y escritor Alex Bellos, es un error pensar que todo se reduce al talento: incluso los mejores exponentes de las matemáticas pueden tardar decenas de años en dominar el oficio. Bellos piensa que una de las razones de que la gente no comprenda las matemáticas es sencillamente que no tienen tiempo suficiente que dedicarles.

Hacer un dibujo del problema ayuda. Pensemos en los números negativos. Visualizar cinco ovejas es bastante fácil, pero imaginarse menos cinco ovejas es realmente difícil. El lugar de los números negativos solo se hizo obvio cuando alguien tuvo la brillante idea de disponer todos los números existentes 0, 1, 2, 3, … sobre una línea recta. Análogamente, los números complejos solo despegaron de verdad con la llegada de un «plano complejo» donde representarlos (véase el capítulo 5).

Las analogías también son útiles. El consejo de Stewart es que si te resulta difícil pensar en elipses, lo que puedes hacer es pensar en un círculo aplastado y seguir adelante. En líneas generales, y en contra de la concepción de las matemáticas como una disciplina de lógica implacable, a menudo la mejor forma de atacar un problema de cualquier tipo es hacerse rápidamente una idea general, saltarse todo aquello que no se sepa resolver y luego volver atrás y rellenar los detalles. «Muchos matemáticos dicen que es importante ser capaces de pensar de manera difusa», dice Stewart.

Entrevista: Inspirado por el cubo de Rubik

El genio matemático se mide en Medallas Fields. Cada cuatro años se otorgan dos, tres o cuatro medallas a matemáticos de menos de 40 años. Junto con el Premio Abel, están consideradas como la máxima distinción en el campo de las matemáticas. Manjul Bhargava, una de las personas más jóvenes en el momento de acceder al puesto de profesor titular en la Universidad de Princeton (en su caso a los 28 años, en 2003), obtuvo la medalla en 2014. En la siguiente entrevista habla de las formas inusuales en que funciona su cerebro matemático.

La Medalla Fields ¿fue para usted más importante que otras distinciones que ha obtenido?

Cualquier distinción es un hito que te anima a seguir adelante. Personalmente no sé si considero alguna de ellas más importante que las demás. Las matemáticas que me llevaron hasta la medalla fueron para mí mucho más emocionantes que la propia distinción.

La mención en la entrega de la medalla dice que la inspiración para extender la ley de composición de Gauss le llegó de una manera inusual. ¿Qué quiere decir *eso, qué ocurrió?*

La ley de Gauss dice que se pueden componer dos formas cuadráticas –que podemos imaginar como cuadrados de números– para obtener un tercer cuadrado. En el verano de 1998 estaba yo en California, y tenía un minicubo de Rubik. Mientras trataba de visualizar la asignación de números a cada uno de los vértices, vi salir esas formas cuadráticas binarias, tres de ellas. Me senté y escribí las relaciones entre ellas. ¡Un gran día!

¿Algún otro descubrimiento suyo tuvo orígenes también poco habituales?

Suelo pensar en las cosas de una manera muy visual, y el cubo de Rubik es un ejemplo concreto de ese enfoque visual. Pero probablemente sea ese el origen más inusual e inesperado de todos.

Usted ha demostrado varios teoremas. ¿Hay alguno que sea su preferido?

Los matemáticos dicen a menudo que elegir un teorema favorito es como elegir un hijo preferido. Aunque todavía no tengo hijos, comprendo ese sentimiento. He disfrutado trabajando en todos los teoremas que he demostrado.

¿Hay algún matemático, vivo o no, por el que haya sentido especial respeto?

Mi madre [Mira Bhargava, matemática en la Universidad Hofstra en Hempstead, Nueva York] ha sido para mí una fuente de inspiración desde el mismo principio. Siempre ha estado ahí para responder a mis preguntas, animarme y apoyarme, y me ha enseñado lo mucho de lo que es capaz la mente humana.

2. Cero

El cero es la encarnación de la nada. Pero ¿es algo? Iniciamos nuestra exploración de los números con un concepto con el que han luchado los matemáticos durante siglos. ¿Es el cero un número o no lo es?

Una indómita nada

El cero no se comporta como un número normal. Sumamos dos números cualquiera y obtenemos otro número diferente, a menos que uno de ellos sea cero. Multiplicamos cualquier número por cero y el resultado es siempre cero, algo que no ocurre tampoco con ningún otro número. Y que no se nos ocurra intentar dividir un número por cero: los matemáticos generalmente dicen que el resultado es «indefinido», porque, si lo hacemos, resulta un pandemonio (véase «Demostrar que 1 = 2» más adelante).

Estas rarezas son en parte la razón de que el cero existiese como símbolo mucho antes de que fuese aceptado como número. El cero simbólico es bien conocido como «marcador de posición» en nuestra notación numérica posicional basada en potencias de 10. Consideremos por ejemplo la cadena de dígitos «2018». Su valor es igual a a $2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8$. El papel del cero es fundamental: si no estuviese ahí, sería fácil confundir 2018 con 218 o incluso con 20018, y los cálculos tendrían un error de centenas o incluso de millares.

El primer sistema numérico posicional, utilizado para calcular el paso de las estaciones y de los años, surgió en Babilonia, una ciudad de Mesopotamia, en el Iraq actual, hacia 1800 a. C. aproximadamente. La base no era 10 sino 60, y solo tenía dos símbolos, los correspondientes a 1 y 10, que, agrupados toscamente, expresaban el valor de los números. Contar con un sistema semejante tuvo que ser un quebradero de cabeza, aunque solo fuese porque la ausencia de cualquier potencia de 60 en la transcripción de un número no se marcaba con un símbolo, sino (con un poco de suerte) dejando un hueco. No fue hasta alrededor de 300 a. C. cuando apareció un tercer símbolo (una curiosa combinación de dos flechas inclinadas hacia la izquierda) para rellenar esos huecos en los cálculos astronómicos.

Este fue el primer símbolo que existió en el mundo para representar el cero. Unos siete siglos más tarde se inventó por segunda vez el símbolo cero en el otro extremo del mundo, cuando los sacerdotes-astrónomos mayas en Centroamérica comenzaron a utilizar un símbolo en forma de concha de caracol para llenar los huecos del sistema numérico posicional utilizado en el cálculo del calendario. Pero ni los babilonios ni los mayas dieron el siguiente paso: el de tratar el cero como un número por derecho propio que se pudiera manipular o que incluso pudiera ser el resultado de un cálculo.

Demostrar que 1 = 2

Con ayuda de un poco de álgebra y de una operación matemática no permitida, se puede probar que 1 = 2.

1. Sea $a = b$
2. Multiplicamos ambos miembros por a: $a^2 = ab$
3. Sumamos a^2 a ambos miembros: $2a^2 = a^2 + ab$
4. Restamos 2ab a ambos miembros: $2a^2 - 2ab = a^2 - ab$
5. Lo anterior se puede escribir como $2(a^2 - ab) = 1\ (a^2 - ab)$
6. Dividiendo ambos miembros por: $(a^2 - ab)$ tienes $2 = 1$.

¿En qué momento se torció la demostración? En el paso 1 definimos $a = b$, de manera que $a^2 - ab = 0$. Esto invalida el paso 6, porque equivale a dividir por 0: un no-no matemático.

Los antiguos griegos, por lo demás perspicaces matemáticos, tampoco fueron mucho más lejos. El pensamiento griego estaba casado con la idea de que los números expresaban formas geométricas; entonces, ¿qué forma podía corresponderse con algo que no existe? Solamente podía ser la ausencia total de todo, el vacío, concepto que la cosmología dominante por entonces había desterrado. Para los griegos, y para las civilizaciones cristianas que les sucedieron en Europa, el cero era un concepto impío. De modo que, aunque utilizaron a menudo el cero marcador de «posición» babilonio (por ejemplo, en los cálculos astronómicos), evitaron también el cero como número.

El número cero

Las filosofías orientales no tenían ese tipo de escrúpulos, por lo cual la siguiente posta importante en el viaje del cero la encontramos al este y no al oeste de Babilonia, concretamente en el tratado *Brahmasphutasiddhanta* sobre la relación de las matemáticas con el mundo físico, escrito por el astrónomo Brahmagupta en India hacia el 628 d. C. Que sepamos, fue el primero en tratar los números como cantidades puramente abstractas, al margen de cualquier realidad física o geométrica. Eso le permitió considerar cuestiones no ortodoxas, como qué ocurre si de un número se sustrae otro mayor. En términos geométricos es un sinsentido: ¿qué área queda si de la que tenemos se sustrae otra mayor?

Brahmagupta, por el contrario, imaginó los números como situados sobre una línea continua que se extiende en ambos sentidos hasta donde alcanza la vista, con números tanto positivos como negativos; y las reglas establecidas por él para su manejo siguen siendo reconocibles hoy día. En el centro de esta línea, como punto distinguible entre los mundos positivo y negativo, estaba lo que él llamó *sūnya*, la nada.

No mucho más tarde se fusionó o unificó este nuevo número con el cero como símbolo (véase la figura 2.1).

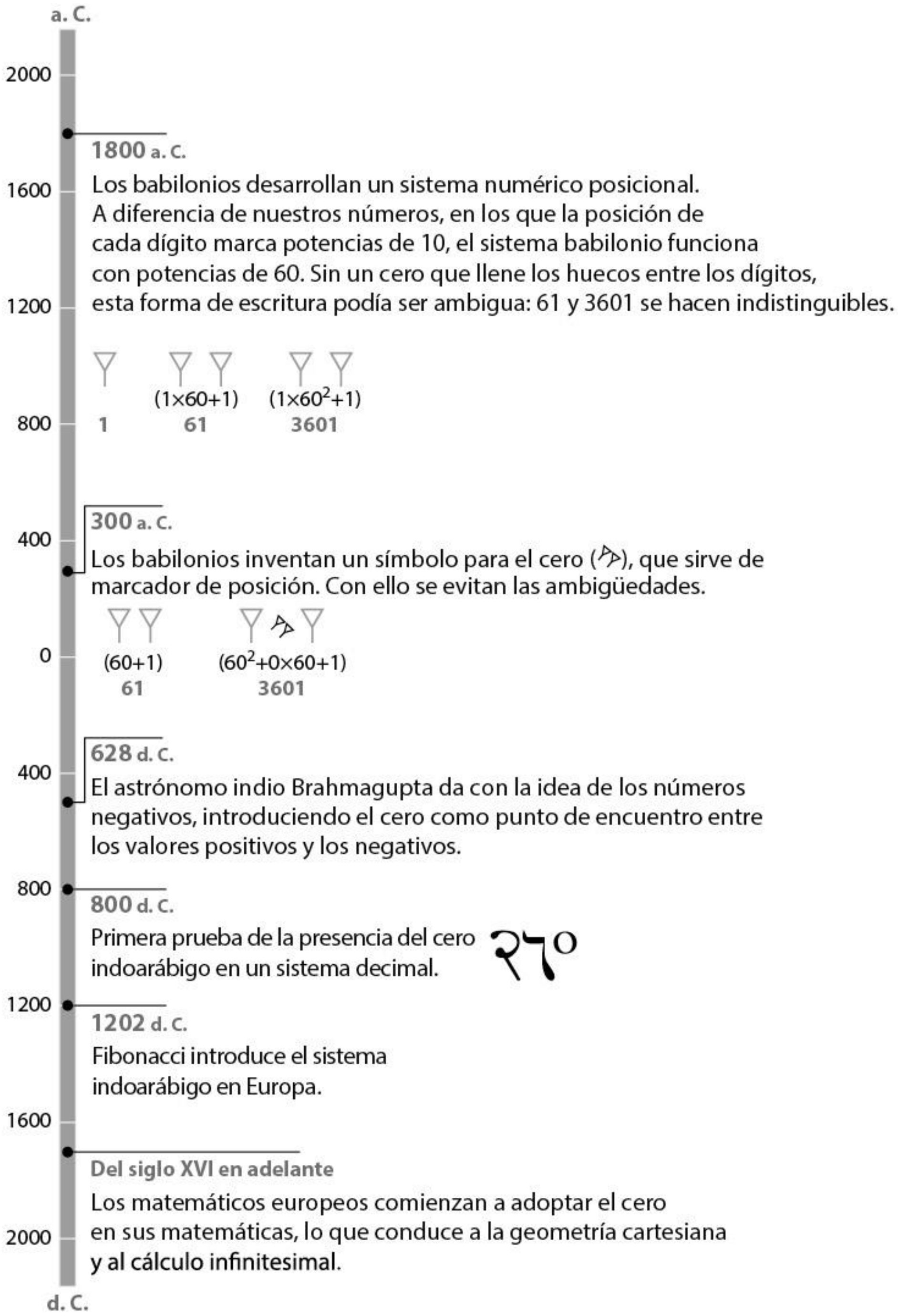


Figura 2.1 El cero es crucial en las matemáticas, pero se tardó miles de años en reconocer su importancia.

La reciente datación de un manuscrito conservado en la Biblioteca Bodleiana en Oxford (Reino Unido) sugiere que ya en el siglo III o IV d. C. los matemáticos indios utilizaban un símbolo parecido a un huevo aplastado, muy cercano a nuestro cero, como marcador de posición. La innovación de Brahmagupta no tardó en convertir este marcador de posición en miembro de un moderno y «dinámico» sistema numérico posicional con todos los dígitos desde el cero hasta la base, del 0 al 9.

El cero asume aquí, casi sin anunciarlo, un nuevo papel: se convierte en una herramienta matemática que pone de manifiesto la potencia de la base del sistema. Añadimos un cero al final de un número decimal y el número queda multiplicado por diez: 2018 se convierte en 20180. Sumamos dos o más números de manera que el total de la columna pase de 9 a 10, «llevamos uno» y dejamos el cero para que la respuesta sea correcta.

La sencillez de tales algoritmos es el origen de la flexible musculatura de nuestro sistema para el manejo de los números. Pronto engendró entre los matemáticos indios y árabes una nueva forma de hacer matemáticas: el álgebra.

La noticia de estas innovaciones tardó mucho tiempo en llegar a Europa. En 1202 el joven italiano Leonardo de Pisa, más conocido por el nombre de Fibonacci, publicó un libro, *Liber abaci*, en el que presentaba los detalles del sistema de conteo arábigo del que había tenido noticia en un viaje por el norte de África. Fibonacci demostró lo superior que era esta notación para la rápida ejecución de cálculos complejos, en comparación con el ábaco y con el sistema no posicional de numerales romanos que prevalecía por entonces.

Figura 2.2 En esta xilografía de *Margarita philosophica* ('Perla de sabiduría'), una enciclopedia del siglo XV compilada por el alemán Gregor Reitsch, la musa de la Aritmética aparece sonriendo a Boecio (izqda.), que calcula con numerales indoarábigos, mientras que Pitágoras (dcha.) lucha con el antiguo método del ábaco.

Mercaderes y banqueros se mostraron enseguida convencidos de la utilidad del sistema indoarábigo (véase la figura 2.2), mientras que la reacción de las autoridades gubernamentales fue menos entusiasta. En 1299 la ciudad de Florencia desterró el uso de los numerales indoarábigos, incluido el cero, por considerar que la posibilidad de hinchar enormemente el valor de un número sin más que añadir un dígito al final era una abierta invitación al fraude.

Pero al final ganó el cero. En el siglo XVII el francés René Descartes inventó el sistema de coordenadas cartesianas, que maridó el álgebra con la geometría para dar a cada forma geométrica una nueva representación simbólica con el cero en el centro. Poco después, Isaac Newton y Gottfried Leibniz inventaron la nueva herramienta del cálculo infinitesimal, que mostró que para explicar cómo algo en el cosmos (una estrella, un planeta o una liebre adelantando a una tortuga) puede cambiar de posición es necesario apreciar antes cómo el cero se funde con lo infinitamente pequeño.

La mejor comprensión del cero se convirtió en el detonante de la Revolución Científica subsiguiente. Pero no fue sino en el siglo XIX cuando se empezó a ver lo esencial que es el cero para las propias matemáticas. La clave fue la llegada de la teoría de conjuntos.

La explicación de los números: la teoría de conjuntos

A finales del siglo XIX, mientras la mayoría de los matemáticos estaban ocupados en añadir un bonito mueble, una nueva habitación, incluso toda una nueva planta al pujante edificio de las matemáticas, un grupo de mentes inquietas empezaron a mostrar interés por los cimientos. Las innovaciones de la época, como la geometría no euclidiana, estaban muy bien, pero los fundamentos ¿eran sólidos? Para demostrar que lo eran había que aclarar una idea fundamental que nadie entendía verdaderamente: la de los números.

El problema, a esas alturas, no era ya su manejo. La gran cuestión consistía en saber qué eran. A alguien podemos enseñarle dos ovejas, dos monedas, dos albatros o dos galaxias. Pero ¿podemos enseñarle «dos»? Es importante ver que el símbolo «2» es una notación, no el número en sí; muchas culturas utilizan un símbolo diferente. Lo mismo ocurre con la palabra «dos»: en otras lenguas será *deux* o *zwei* o *futatsu*. Los humanos llevaban miles de años utilizando los números con excelentes resultados, pero de pronto algunas mentes perspicaces cayeron en la cuenta de que nadie tenía ni idea de qué eran.

Una de las respuestas surgió de dos líneas de pensamiento diferentes: de la lógica matemática y del análisis de Fourier, en el que una onda compleja se representa como combinación de ondas sinusoidales simples. Estos dos campos confluyeron en una idea: los conjuntos. Un conjunto es una colección de objetos matemáticos: números, formas, funciones, redes o lo que sea. Se define enumerando o caracterizando sus miembros. «El conjunto cuyos miembros son 2, 4, 6, 8» y «el conjunto de los enteros pares entre el 1 y el 9» definen el mismo conjunto, que se puede escribir como {2,4,6,8}.

Georg Cantor elaboró alrededor de 1880 una vasta teoría de conjuntos. Cantor estaba intentando resolver algunos problemas técnicos del análisis de Fourier relacionados con las discontinuidades, es decir, con puntos en los que una onda da de pronto un salto. La solución que encontró tenía que ver con la estructura del conjunto de las discontinuidades. Lo importante no eran las discontinuidades individuales, sino la clase entera de las discontinuidades.

Una cosa llevó a la otra. Cantor halló una manera de contar cuántos miembros tiene un conjunto estableciendo una correspondencia uno a uno entre él y un conjunto estándar. Supongamos, por ejemplo, que el conjunto es {Sabio, Gruñón, Feliz, Dormilón, Tímido, Mocoso, Mudito}. Para contarlos, cantamos «1, 2, 3…» mientras avanzamos por la lista: Sabio (1), Gruñón (2), Feliz (3), Dormilón (4), Tímido (5), Mocoso (6), Mudito (7). Justo: siete enanos. Lo mismo se puede hacer con los días de la semana: lunes (1), martes (2), miércoles (3), jueves (4), viernes (5), sábado (6), domingo (7).

Otro matemático de la época, Gottlob Frege, retomó las ideas de Cantor y pensó que podían resolver el gran problema filosófico de los números. Se le ocurrió que la manera de definirlos podía ser por el proceso sorprendentemente simple de contar.

¿Contar qué? Una colección de cosas: un conjunto. ¿Cómo contarlas? Haciendo corresponder las cosas del conjunto con un conjunto estándar de tamaño conocido. El paso siguiente fue simple pero devastador: prescindir de los números. Para contar los días de la semana se podían utilizar los enanos. Basta con establecer la correspondencia: lunes (Sabio), martes (Gruñón), miércoles (Feliz), jueves (Dormilón), viernes (Tímido), sábado (Mocoso), domingo (Mudito). La semana tiene Mudito días. Es un sistema numérico alternativo perfectamente razonable.

Cielo e infierno de Georg Cantor

Georg Cantor, nacido en 1845, fue el padre de la teoría de conjuntos, el fundamento de todas las consideraciones modernas sobre el número. Pero sus innovadores estudios, especialmente sus investigaciones sobre la naturaleza del infinito, no siempre tuvieron buena acogida. Se dice que su coetáneo Henri Poincaré describió la teoría de conjuntos como «una enfermedad de la que nos hemos recuperado». Algunos teólogos cristianos veían sus trabajos sobre el infinito como una ofensa directa a las ideas divinas.

Al parecer, Cantor, que era cristiano devoto, sufría con las paradojas y problemas que fue encontrando en sus estudios y empezó a padecer crisis nerviosas cada vez con mayor frecuencia. En las últimas décadas de su vida abandonó por completo las matemáticas para concentrarse en probar que el verdadero autor de los dramas de Shakespeare era el filósofo Francis Bacon y que Jesús era hijo de José de Arimatea. Para entonces, sin embargo, la teoría de conjuntos que había creado estaba ya bien establecida. En 1926 el matemático

David Hilbert dijo: «Nadie nos expulsará ya del paraíso creado por Cantor».

No nos dice (todavía) qué es un número, pero nos da una manera de definir «el mismo número» o «igual número de». El número de días es igual al número de enanos, no porque ambos sean siete, sino porque podemos establecer una correspondencia entre días y enanos.

¿Qué es entonces un número? Los lógicos matemáticos se percataron de que para definir el número 2 hacía falta construir un conjunto estándar que intuitivamente tuviera dos miembros; para definir 3, utilizar un conjunto estándar con tres miembros, y así sucesivamente. Pero eso no hacía más que aplazar el problema, porque ¿qué conjunto estándar había que utilizar? Tenía que ser único, y su estructura tenía que corresponderse con el proceso de contar. Aquí es donde entró el cero… y el conjunto vacío.

El conjunto vacío

Si cero es un número, debería contar los miembros de un conjunto. Pero ¿de cuál? Tiene que ser un conjunto que no tenga ningún miembro. No es difícil encontrar alguno: por ejemplo, «el conjunto de todos los ratones que pesan 20 toneladas». También existe un conjunto matemático sin ningún miembro: el conjunto vacío. Es único, porque todos los conjuntos vacíos tienen exactamente los mismos miembros: ninguno. Su símbolo, introducido en 1939 por un grupo de matemáticos conocido por el seudónimo de Nicolas Bourbaki, es Ø. La teoría de conjuntos necesita Ø por la misma razón que la aritmética necesita el 0: las cosas son mucho más simples si lo incluimos. De hecho, podemos definir el número 0 como el conjunto vacío.

¿Y el número 1? Intuitivamente, necesitamos un conjunto que tenga exactamente un miembro. Un conjunto que sea único. El conjunto vacío es único, así que definimos 1 como el conjunto cuyo único miembro es el conjunto vacío: en símbolos {Ø}. Esto último no es lo mismo que el conjunto vacío, porque tiene un miembro, mientras que el conjunto vacío no tiene ninguno. De acuerdo, ese miembro resulta ser el conjunto vacío; pero el caso es que hay uno. Imaginemos los conjuntos como bolsas de papel que contienen dentro de ellas a sus miembros. El conjunto vacío es una bolsa de papel vacía. El conjunto cuyo único miembro es el conjunto vacío es una bolsa de papel que contiene una bolsa de papel vacía. Lo cual es diferente: tiene dentro una bolsa (véase la figura 2.3).

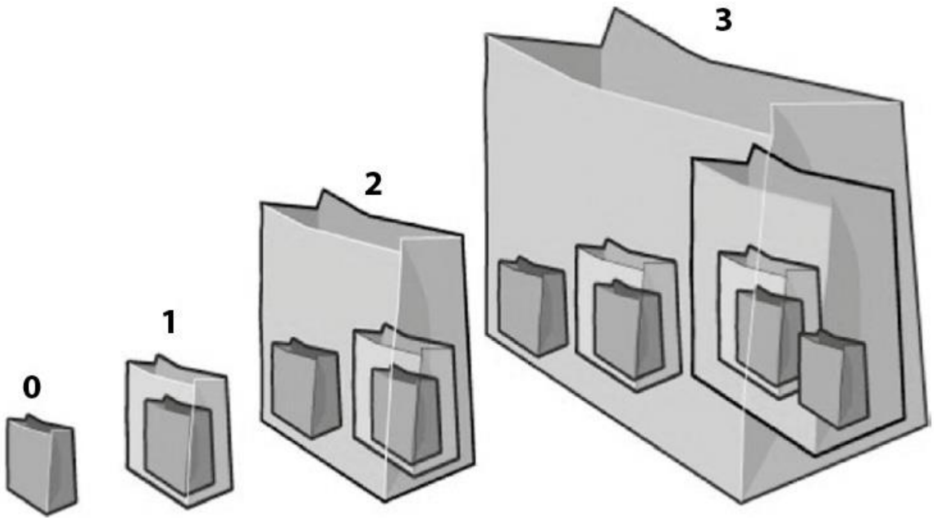


Figura 2.3 El conjunto vacío no tiene ningún miembro, como una bolsa de papel vacía. Pero poniendo la bolsa vacía en una bolsa más grande podemos formar conjuntos cada vez más grandes: la base de nuestra definición de número.

El paso clave es definir el número 2. Necesitamos un conjunto de dos miembros, definido de manera única.

¿Por qué no utilizar los dos únicos conjuntos mencionados hasta ahora, Ø y {Ø}? Definimos por tanto 2 como el conjunto {Ø, {Ø}}, que, gracias a nuestras definiciones, es lo mismo que {0, 1}.

Aparece así un patrón. Definimos 3 como {0, 1, 2}, un conjunto con tres miembros, todos ellos ya definidos. Por tanto 4 será {0, 1, 2, 3}, 5 será {0, 1, 2, 3, 4}, y así sucesivamente. Todo remite al conjunto vacío: por ejemplo, 3 es {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}} y 4 es {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}}. Mejor no ver cómo se escribe el número total de enanos.

Aquí los materiales de construcción son abstracciones –el conjunto vacío y el acto de formar un conjunto haciendo una lista de sus miembros–, pero la forma en que estos conjuntos se relacionan entre sí conduce a una construcción bien definida del sistema numérico, en la que cada número es un conjunto específico que intuitivamente tiene ese número de miembros. La historia no acaba ahí. Una vez definidos los números enteros positivos, la utilización de trucos parecidos de la teoría de conjuntos permite definir los números negativos, las fracciones, los números reales (decimales infinitos), los números complejos, etc. Es el terrible secreto de las matemáticas: todo se basa en la nada.

3. Infinito

En el otro extremo de la escala numérica, partiendo del cero, está el infinito. Con él engendramos un monstruo. La mente nos dice que debería existir, para luego venirse rápidamente abajo ante las consecuencias de un concepto que es demasiado grande para nuestro cerebro.

¿Qué es el infinito?

El infinito tiene un factor de anonadamiento preprogramado. Matemáticamente comenzó como una manera de expresar el hecho de que algunas cosas, como contar, no tienen ningún fin evidente. Contemos hasta 146 y ahí está el 147; contemos hasta un billón y ahí tenemos el billón y uno. Hay dos maneras de tratar la situación: ser prudentes y decir que no existe ningún número mayor que los demás, que solo existe un «potencial» para el infinito, o ser más arrojados y decir que hay infinitos números, tratando el infinito como una cantidad real con determinadas propiedades.

Fue solo a finales del siglo XIX cuando los matemáticos se decantaron por el infinito real. Como ocurrió con la elucidación del valor real de cero, la clave fue la teoría de conjuntos (véase el capítulo 2). Por ejemplo, el conjunto de los números naturales, 1, 2, 3, 4, …, es un objeto bien definido y único, y tiene un tamaño: infinito.

Pero escribamos ahora el cuadrado de esos números: 1, 4, 9, 16 … Esta secuencia crece mucho más deprisa, por lo cual debería alcanzar el infinito más deprisa, ¿no es cierto? No. Como descubrió Galileo ya en el siglo XVII, todo número natural tiene un cuadrado, por lo que existen tantos cuadrados como números enteros: infinitos.

De hecho, existen muchos de estos infinitos «numerables» relacionados con los números naturales numerables. Se puede demostrar que todos ellos tienen el mismo tamaño: he ahí el fondo del problema aparentemente paradójico del hotel infinito de Hilbert (véase más adelante). La aritmética desarrolla su acción en el ámbito del infinito numerable.

Así pues, parece que el infinito es infinito y se acabó. Pero no es así. Consideremos los números reales: los números enteros, más todos los números racionales e irracionales que hay entre ellos (1,5; π; la raíz cuadrada de 2, etc.). Preguntar cuántos números reales hay equivale a preguntar cuántos puntos hay en una recta. Una línea recta es perfectamente recta y lisa, sin agujeros ni huecos; contiene infinitos puntos, de manera que la respuesta es de nuevo: «infinitos».

Sin embargo, el gran autor de la teoría de conjuntos, Georg Cantor, demostró que este infinito «del continuo» es un número más grande que el infinito numerable. De hecho, es simplemente un peldaño de la escala que conduce a niveles cada vez más altos de infinito y que se extiende hasta… bueno, el infinito. La relación entre el infinito numerable, el del continuo y todos los demás tipos de infinito es una de las grandes cuestiones no resueltas de las matemáticas.

La hipótesis del continuo

Cuando el 8 de agosto de 1900 David Hilbert bajó del estrado en la Sorbona en París, pocos de los delegados allí congregados se mostraron muy impresionados. De acuerdo con un informe de la época, el debate que siguió a la ponencia del gran matemático ante el segundo Congreso Internacional de Matemáticos fue «bastante poco animado». Más pasión despertó otro posterior sobre si adoptar o no el esperanto como lengua de trabajo en matemáticas.

Lo cierto, sin embargo, es que la ponencia de Hilbert estableció la agenda matemática para el siglo XX, resumida en una lista de 23 cuestiones cruciales no resueltas. Hoy día se ha encontrado ya la solución para muchas de ellas, como por ejemplo el problema de cómo empaquetar esferas para optimizar el aprovechamiento del espacio disponible (véase el capítulo 7). Otras, como la hipótesis de Riemann, que trata de cómo están distribuidos los números primos, han experimentado poco o ningún progreso. Pero el primer punto de la lista de Hilbert sobresale por lo extraño de la respuesta que, generación tras generación, han dado desde entonces los matemáticos: que las matemáticas no están en situación de proporcionar una respuesta.

El hotel de Hilbert

La paradoja del Gran Hotel de David Hilbert nos dice que los conjuntos infinitos no funcionan como intuitivamente cabría pensar.

Imaginemos un hotel con un número infinito (numerable) de habitaciones, todas ellas ocupadas. Llega un autobús con otros 50 clientes. ¿Dónde se les puede acomodar? En un hotel infinito no hay ningún problema: a cada una de las personas alojadas ya en el hotel la trasladamos 50 habitaciones más arriba y acomodamos a los recién llegados en las habitaciones 1 a 50.

De hecho, utilizando un algoritmo de realojamiento ligeramente diferente, podemos acomodar un grupo infinitamente grande de nuevos huéspedes: basta con trasladar al ocupante de la habitación 1 a la 2, al de la 2 a la 4, y así sucesivamente, desplazando al de la habitación n a la $2n$. Después alojamos a los recién llegados en las habitaciones impares, que están todas libres y cuyo número es infinito.

La aparente paradoja de Hilbert nos dice que, por muy tentador que parezca pensar que hay la mitad de números pares que de números enteros, en realidad las dos colecciones se pueden emparejar exactamente. Es más, todo conjunto de números enteros es o bien finito o bien infinito numerable, y los conjuntos infinitos numerables tienen todos el mismo tamaño. Es más, con un poco más de esfuerzo matemático se puede demostrar que el hotel de Hilbert puede acomodar un número infinito de grupos infinitos de nuevos clientes, y así..., *ad infinitum*.

La hipótesis, formulada en origen por Georg Cantor, se conoce como la hipótesis del continuo. Afirma que no existe ningún nivel intermedio de infinito entre el nivel numerable, que comprende los números enteros, y el nivel del continuo, que comprende los números reales.

El intento de probar o refutar la hipótesis del continuo supone analizar todos los posibles subconjuntos de los números reales. Si todos y cada uno de esos conjuntos son numerables o tienen el mismo tamaño que todo el continuo, entonces la hipótesis del continuo es correcta. Y a la inversa: un solo subconjunto de tamaño intermedio la refutaría.

Cantor no pudo probar la hipótesis, porque, como demostró el matemático y filósofo Bertrand Russell, se había precipitado. Aunque sus conclusiones sobre el infinito eran correctas, la base lógica de su teoría de conjuntos era defectuosa, porque descansaba en una concepción informal y en último término paradójica de lo que son los conjuntos.

No fue sino en 1922 cuando dos matemáticos alemanes, Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel, establecieron para el manejo de los conjuntos una serie de reglas aparentemente bastante robustas para soportar la torre de infinitos de Cantor y estabilizar los fundamentos de las matemáticas. Pero por desgracia dichas reglas no dieron una respuesta clara para la hipótesis del continuo. De hecho, ese desarrollo y otros de la época parecían sugerir con fuerza que quizá no existiera ninguna respuesta.

La paradoja de Russell

Formulada por Bertrand Russell en 1901, esta paradoja puso de manifiesto un defecto en la formulación original de Georg Cantor de la teoría de conjuntos, defecto que solo pudo ser subsanado mediante posteriores refinamientos.

Imaginemos un conjunto R definido como el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. Si R no es un miembro de sí mismo, entonces su definición dicta que sí lo es. Pero R no es un miembro de sí mismo. Entonces ¿qué es?

El problema fundamental de la autorreferencia planteado por la paradoja de Russell –es decir, enunciados lógicos u objetos que hacen referencia a sí mismos– aqueja a todos los sistemas de lógica. Está también en el núcleo de otra paradoja muy anterior, la del mentiroso, encarnada en el enunciado «Este enunciado es falso». El entrecomillado ¿es verdadero o falso? Kurt Gödel demostraría más tarde en sus teoremas de incompletitud que la autorreferencia representa un problema fundamental para las matemáticas.

El axioma de elección

El obstáculo que surgió inmediatamente fue una regla conocida como el «axioma de elección». El axioma no formaba parte de las reglas originales de Zermelo y Fraenkel, pero enseguida fue incorporado a ellas cuando quedó claro que ciertas matemáticas esenciales, como la posibilidad de comparar diferentes tamaños del infinito, eran imposibles sin él.

El axioma de elección establece que, dada una colección de conjuntos, podemos siempre formar otro nuevo eligiendo un elemento de cada uno de ellos. La cosa parece inocua, pero esconde un aguijón. Los matemáticos polacos Stefan Banach y Alfred Tarski demostraron enseguida cómo utilizar el axioma para dividir el conjunto de puntos que definen una bola esférica en seis subconjuntos que, deslizándolos convenientemente, hacían posible obtener dos bolas del mismo tamaño que la original. El resultado era síntoma de un problema fundamental: el axioma de elección permitía la existencia de una serie de conjuntos de números reales especialmente perversos.

La noticia llegó en un momento en que comenzaba a estar en boga el concepto de «indemostrabilidad». En 1931 el lógico austriaco Kurt Gödel demostró sus famosos teoremas de incompletitud, que probaban que, incluso con las reglas básicas mejor entretejidas, hay siempre enunciados sobre conjuntos y números (como el axioma de elección o la hipótesis del continuo) que las matemáticas no pueden ni demostrar ni refutar.

Al mismo tiempo, Gödel tuvo una corazonada, aparentemente alocada, acerca de cómo rellenar la mayor parte de estas fisuras en la estructura lógica subyacente de las matemáticas: sencillamente construir otros niveles de infinito encima de ella. Demostró su idea en 1938. Empezando por una concepción simple de los conjuntos compatible con las reglas de Zermelo y Fraenkel, y adaptando cuidadosamente su superestructura infinita, creó un entorno matemático en el que eran simultáneamente verdaderos el axioma de elección y la hipótesis del continuo. A su nuevo mundo lo llamó el «universo construible», o simplemente «universo L».

La incompletitud de Gödel

Kurt Gödel tenía 25 años cuando, en 1931, publicó sus dos teoremas de incompletitud. Los teoremas formalizaban, en un enunciado general sobre los límites de las matemáticas, el tipo de inconsistencias lógicas de la teoría de conjuntos como las detectadas por Bertrand Russell y otros.

El primer teorema de incompletitud afirma que en todo sistema de axiomas lógicos consistente que describa la aritmética de los números naturales habrá siempre enunciados sobre los números naturales que pueden ser verdaderos pero que no pueden ser probados. El segundo enunciado de incompletitud dice que un sistema semejante de axiomas no se puede utilizar para probar su propia consistencia. Probar la consistencia requiere construir alrededor de él una estructura lógica mayor. Pero esta estructura también adolecerá de su propia incompletitud.

Desde entonces los matemáticos han descubierto una gran diversidad de modelos de la teoría de conjuntos. Algunos son «mundos de tipo L» con superestructuras como el L de Gödel, que difieren solo en el rango de niveles de infinito adicionales que contienen; otros tienen estilos arquitectónicos enormemente variados con niveles completamente diferentes y escaleras infinitas que conducen en todas las direcciones.

A casi todos los efectos, la vida dentro de esas estructuras es la misma: ni las matemáticas cotidianas ni las leyes de la física difieren generalmente de una a otra. Pero la existencia de este «multiverso» matemático parecía abortar también cualquier esperanza de llegar algún día a entender la hipótesis del continuo.

Como demostró en la década de 1960 el matemático Paul Cohen, en algunos mundos lógicamente posibles la hipótesis es verdadera y no existe ningún nivel intermedio de infinito entre el numerable y el continuo; en otros, hay uno; y en otros hay infinitos. Con la lógica matemática tal como la conocemos, no hay manera de saber en qué mundo estamos y si la hipótesis del continuo es o no verdadera.

Figura 3.1 A finales del siglo XIX y principios del XX, muchas grandes figuras de las matemáticas contribuyeron al desarrollo de la teoría de conjuntos y, con ella, a los fundamentos de la aritmética.

El infinito ¿es real?

El infinito es esencial para la estructura lógica de las matemáticas. En el terreno práctico son también muy pocas las cosas que funcionan suavemente sin utilizar el infinito y su reverso, el infinitésimo. En geometría, por ejemplo, definir un círculo perfecto requiere los infinitos dígitos de π, y funciones matemáticas como el seno y el coseno, que relacionan ángulos con la razón de las longitudes de dos segmentos, vienen definidas por un número infinito de términos. En mecánica, calcular movimientos continuos requiere trocear el tiempo en intervalos infinitesimales.

Pero todo eso ¿es verdaderamente real? Consideremos el conjunto infinito de los números enteros: en realidad nunca podríamos llegar a escribirlos todos ellos; moriríamos antes de llegar al final. Aunque otra persona tomara el relevo, en un universo finito llegaría un momento en que se agotaría el papel donde escribirlos y la información necesaria para codificarlos (véase el capítulo 9).

Esa es razón suficiente para andar con cuidado, opina el matemático Norman Wildberger, de la Universidad de Nueva Gales del Sur en Sídney (Australia). Wildberger señala que durante la mayor parte de la historia se ha mantenido el infinito a distancia. Para grandes figuras en este terreno, desde Aristóteles hasta Newton, el único infinito era el infinito en potencia, el tipo de infinito que nos permite sumar 1 a cualquier número sin temor a tropezar con el final de la recta numérica, que nunca se alcanza realmente. Eso es muy diferente a aceptar un infinito al que ya se ha llegado y que se ha embalado convenientemente como entidad matemática.

El hombre del infinito

El teórico conjuntista Hugh Woodin, de la Universidad de Harvard, sabe mejor que nadie cómo discurrir sobre un concepto tan alucinante como el infinito. Woodin tiene todo un nivel de infinito que lleva su nombre, un nivel especialmente vertiginoso poblado por números conocidos como los cardinales de Woodin. «Son tan grandes que no puedes deducir su existencia», dice.

Semejantes infinitos son la última abstracción: aunque es posible manejarlos lógicamente, no es posible escribir fórmulas en los que aparezcan, ni tampoco escribir programas de ordenador con el fin de contrastar predicciones sobre ellos. Los infinitos de Woodin sirven para eliminar algunas de las inconsistencias en la teoría de conjuntos descubierta por Kurt Gödel, entre otros. «La teoría de conjuntos está plagada de irresolubilidad. Casi todas las preguntas que quieres formular son irresolubles», dice Woodin, que ha estado trabajando en una nueva superestructura lógica de las matemáticas que, como tributo al mundo lógico L de Kurt Gödel, ha denominado «último L».

El último L implica que la hipótesis del continuo de Cantor es verdadera, de modo que no hay nivel intermedio entre el infinito numerable y el infinito del continuo. Pero no acaba ahí. El amplio y aireado espacio de que dispone permite añadir, en la parte superior de la escalera infinita, los escalones que sean necesarios para llenar los huecos de abajo, haciendo buena la corazonada de Gödel sobre la utilización de infinitos para erradicar la irresolubilidad de que están plagadas la matemáticas. El teorema de incompletitud de Gödel no estaría muerto, pero podríamos arrinconarlo todo lo arriba de la escalera que quisiéramos, en el ático infinito de las matemáticas.

Según Wildberger, los problemas de la teoría de conjuntos deberían abordarse, no con más infinito, sino con menos. La razón es que muchas de las graves deficiencias lógicas de las matemáticas modernas están relacionadas de una manera u otra con conjuntos infinitos de números reales. Wildberger lleva trabajando desde los años noventa en una nueva versión de la trigonometría y la geometría euclidiana libre de infinitos. Su «geometría racional» tiene como objetivo evitar esos infinitos, sustituyendo por ejemplo los ángulos por «aperturas», cantidades finitas extraídas de vectores matemáticos que representan dos rectas en el espacio.

Doron Zeilberger, de la Universidad Rutgers en Piscataway, Nueva Jersey (Estados Unidos), es partidario de un enfoque aún más radical y de prescindir también del infinito potencial. Olvidemos todo lo que creíamos saber sobre las matemáticas: existe un número mayor que todos los demás. Empecemos por 1 y sigamos contando hasta llegar a un número que no podemos superar, una especie de velocidad de la luz de las matemáticas.

Esto suscita no pocas preguntas. ¿Cómo de grande es el número más grande? Zeilberger dice que es tan grande que nunca podríamos alcanzarlo, de manera que en lugar de eso le ha asignado un símbolo, N_0. ¿Qué ocurre si le sumamos 1? La respuesta de Zeilberger es por analogía con el procesador de un ordenador. Todos los ordenadores tienen un entero que es el más grande que pueden manejar: si se sobrepasa, se obtiene un «error de *overflow*» o el procesador reinicia el número a cero.

Hasta ahora, de quienes más atención han recibido las matemáticas finitistas es de los informáticos y los investigadores en robótica, que trabajan, como es lógico, con formas finitas de las matemáticas. Los procesadores finitos no pueden aproximar los potencialmente infinitos dígitos de los números reales. En su lugar utilizan la aritmética de punto flotante, una forma de notación científica que permite al ordenador ignorar dígitos y ahorrar en memoria sin perder el alcance general del número. Konrad Zuse, ingeniero alemán y uno de los pioneros de la aritmética de punto flotante, afirmó ya en 1969 que el propio universo es un ordenador digital, un ordenador sin espacio para el infinito.

4. Números primos

Los números primos son los elementos constitutivos de todos los demás números. Encierran muchos misterios: entenderlos significa entender algunos de los problemas más profundos de las matemáticas.

Por qué son importantes los números primos

Los números primos (los números mayores que 1 y divisibles solo por 1 y por sí mismos) son los átomos del sistema numérico. La secuencia comienza con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 … y es infinitamente larga.

Su verdadera importancia estriba en que todos los números que hay entremedias se pueden formar multiplicando primos entre sí: 4 es 2 × 2, 6 es 2 × 3, 8 es 2 × 2 × 2, 9 es 3 × 3, etc. Entendiendo las propiedades de los primos podemos entender otras propiedades profundas de los números en general.

Los antiguos griegos comprendieron muchos aspectos de los primos. En lo que quizás sea el primer gran ejemplo de una demostración sin fisuras, Euclides probó hace 2300 años que existen infinitos números primos.

La prueba de Euclides de los números primos

El matemático griego Euclides vivió hacia el 300 a. C. en Alejandría, en lo que hoy es Egipto. Se le conoce sobre todo por su tratado de matemáticas, los *Elementos*, en el que estableció las reglas básicas de la geometría y muchas otras cosas, entre ellas una demostración de que la lista de los números primos no tiene fin.

Supongamos que alguien afirma que tiene una lista completa de los números primos. Multipliquemos todos los primos de la lista entre sí y sumemos 1 al número resultante. Por definición, este nuevo número no es divisible por ninguno de los primos de la lista, porque siempre dará un resto de 1. Por consiguiente, el nuevo número será, o primo, o divisible por un primo no incluido en la lista. Si añadimos este nuevo primo a la lista, la repetición del proceso demostrará que en toda lista finita falta siempre un número primo.

Sin embargo, otras cuestiones relativas a los números primos son más difíciles de resolver. La hipótesis de Riemann, por ejemplo, que tiene que ver con la distribución de los números primos a lo largo de la recta numérica, es uno de los siete grandes «problemas del Milenio» para cuya solución se estableció un premio de un millón de dólares (véase el capítulo 7).

Grandes números primos y criptografía

Aunque no existe ningún número primo mayor que todos los demás, eso no ha disuadido a los matemáticos de competir a lo largo de los años para descubrir primos cada vez mayores (véase la figura 4.1).

Esta búsqueda ha estado presidida desde 1996 por la Gran búsqueda de números primos de Mersenne por Internet (GIMPS, en inglés *Great Internet Mersenne Prime Search*), un proyecto de computación distribuida que utiliza programas gratuitos para examinar números y comprobar si son primos de Mersenne. Los primos de Mersenne son números primos de la forma $2^p - 1$, donde p es primo. Esto los hace relativamente fáciles de encontrar, pero comprobar que no son divisibles por ningún primo inferior a ellos es una actividad intensiva desde el punto de vista computacional.

En 1999 GIMPS encontró el primer número primo de un millón de dígitos. El mayor número primo conocido actualmente tiene más de 23 millones de dígitos. Ostentar el récord del mayor número primo puede ser una cuestión de gloria, pero lo cierto es que los grandes números primos tienen también mucha importancia en la práctica. La banca por internet, el comercio en línea y la autentificación digital utilizan todas ellas la encriptación, es decir, el cifrado de mensajes de manera que solo el destinatario sepa cómo descifrarlos; y ese proceso se basa en los números primos.

Rango	Valor	Núm. de dígitos	Descubierto en	¿Mersenne?
1	$2^{74207281}-1$	22338618	2016	Sí
2	$2^{57885161}-1$	17425170	2013	Sí
3	$2^{43112609}-1$	12978189	2008	Sí
4	$2^{42643801}-1$	12837064	2009	Sí
5	$2^{37156667}-1$	11185272	2008	Sí
6	$2^{32582657}-1$	9808358	2006	Sí
7	$10223 \cdot 2^{31172165}+1$	9383761	2016	
8	$2^{30402457}-1$	9152052	2005	Sí
9	$2^{25964951}-1$	7816230	2005	Sí
10	$2^{24036583}-1$	7235733	2004	Sí

Figura 4.1 Los números primos más grandes conocidos (hasta agosto de 2017).

La persona que quiere recibir un mensaje encriptado multiplica entre sí dos grandes números primos para crear un tercer número que forma parte de una clave pública compartida con todos aquellos que quieren enviarle un mensaje. Cualquiera que tenga la clave pública puede encriptar mensajes. Sin embargo, para desencriptarlos y obtener un mensaje comprensible hace falta conocer los dos números primos originales. Con números suficientemente grandes, encontrar los números primos que lo componen es prácticamente imposible, porque la única manera de hacerlo es, en esencia, ensayar todas las posibilidades. Esto significa que la única persona que puede descifrar los mensajes es quien generó la clave pública, lo cual confiere seguridad a todo el proceso.

La conjetura de los primos gemelos

A medida que avanzamos hacia números cada vez más grandes, los primos van estando por término medio cada vez más espaciados. Es algo que cuadra con la intuición y con la experiencia: los primeros primos, 2, 3 y 5, están muy juntos, pero al avanzar por la recta numérica hay cada vez más primos por los que puede ser divisible el número en cuestión. Los dos primos más grandes menores que 100 son 89 y 97, separados por una diferencia de ocho.

Sin embargo, los detalles de cómo están distribuidos son sutiles e impredecibles. Justo después del 100 encontramos los primos 101, 103, 107 y 109, los cuatro muy seguidos. Por término medio, los primos se van espaciando cada vez más, aunque parecen existir pequeñas bolsas de acumulación de estos números.

Aparte del 2 y el 3 no puede haber ninguna pareja de números consecutivos que sean ambos primos, porque todos los números pares, aparte del 2, son divisibles por 2. Los primos gemelos son parejas de primos que difieren en 2 unidades, y al parecer existen muchos de ellos. Algunos ejemplos son 3 y 5, 41 y 43, 107 y 109; la siguiente pareja de años primos gemelos será 2027 y 2029.

La conjetura de los primos gemelos predice que, al igual que hay infinitos números primos, hay infinitas parejas de primos gemelos. Es difícil determinar la fecha en que fue formulada por primera vez; probablemente en tiempos de los antiguos griegos. Hay buenas razones para pensar que es verdadera. Pero a pesar de que desde mediados del siglo XIX el problema ha sido abordado por generaciones enteras de notables especialistas en teoría de números, no se ha encontrado ninguna demostración concluyente, y hasta hace poco tampoco había señales de ningún progreso.

La situación cambió en abril de 2013, con una demostración del hasta entonces desconocido matemático Yitang Zhang, de la Universidad de Nuevo Hampshire (Estados Unidos), de que existen infinitas parejas de números primos separados por una diferencia de 70 millones o menos.

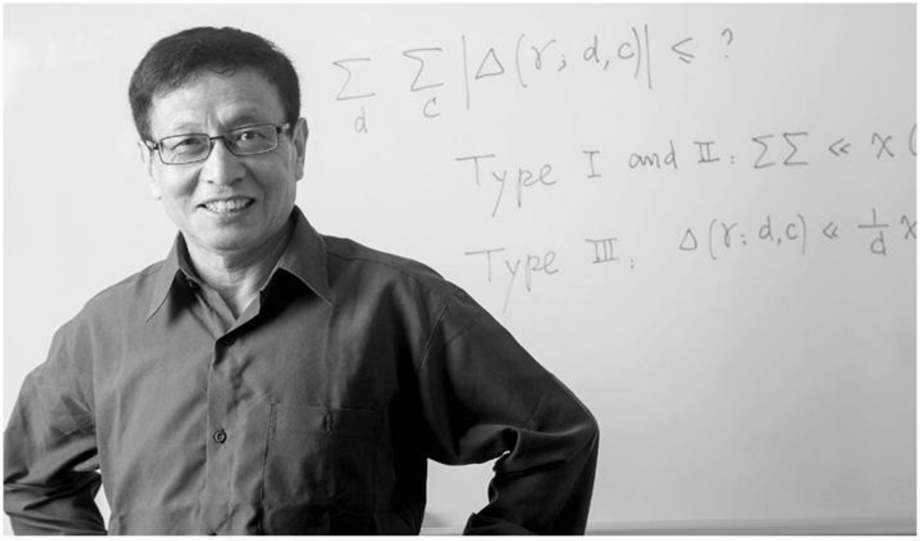


Figura 4.2 Yitang Zhang, de la Universidad de Nuevo Hampshire, sorprendió al mundo en 2013 con un paso importante hacia la demostración de la célebre conjetura de los primos gemelos.

El resultado no parece demasiado impresionante cuando lo que se busca es una diferencia de solo 2, pero fue la primera vez que alguien conseguía obtener una cota finita, y 70 millones es mucho más pequeño que infinito.

Rompiendo con el estereotipo de que los matemáticos obtienen sus mejores resultados en su juventud, Zhang tenía entonces cincuenta y muchos años, y solo había conseguido un puesto académico después de trabajar durante un tiempo en la cadena de restaurantes Subway al término del doctorado. La cota de 70 millones de Zhang no era la más baja que se podía obtener con su planteamiento, con lo cual se logró ajustar los detalles de la demostración para obtener un resultado mejor. «No me puedo resistir: hay infinitos pares de primos separados por una diferencia de 59 470 640 como máximo», escribió el matemático australiano Scott Morrison en su blog a finales de mayo de 2013.

Al poco tiempo, Terence Tao, laureado con la Medalla Fields, inició una colaboración en línea para abordar el problema de manera más sistemática. A finales de julio de 2013 la colaboración había utilizado el método de Zhang para probar que existen infinitas parejas de números primos separados entre sí por una diferencia de no más de 4680. En noviembre de 2013 James Maynard, que acababa de terminar su doctorado en teoría analítica de números en la Universidad de Oxford, diseñó una versión más sencilla del método de Zhang y redujo la cota a 600. En abril de 2014 la colaboración en línea había utilizado el método mejorado para demostrar que existen infinitas parejas de números primos separados por una diferencia de no más de 246.

Desde entonces no se ha avanzado. Los planteamientos empleados hasta ahora utilizan todos ellos una técnica llamada teoría de cribas, cuyos orígenes se remontan a Eratóstenes de Cirene, matemático griego del siglo III a. C.

Los mayores primos gemelos

En agosto de 2017, la pareja más grande de primos gemelos separados por una diferencia de 2 era:

$$2996863034895 \times 2^{1290000} + 1$$

y

$$2996863034895 \times 2^{1290000} - 1$$

Los primos ¿están distribuidos al azar?

El que un número sea o no primo es algo que está predeterminado. Pero los matemáticos no tienen ningún modo de predecir qué números son primos, de manera que tienden a tratarlos como si ocurrieran al azar. En 2016, sin embargo, Kannan Soundararajan y Robert Lemke Oliver, de la Universidad Stanford en California, confirmaron que eso no es del todo cierto.

Aparte del 2 y del 5, todos los primos terminan en 1, 3, 7 o 9 (y tiene que ser así, porque si no serían divisibles por 2 o por 5) y las cuatro terminaciones son igual de probables. Pero al examinar los números primos, Soundararajan y Oliver comprobaron que los primos terminados en 1 van seguidos de otro primo terminado en 1 solamente el 18,5 por ciento de las veces. Si los primos estuviesen distribuidos realmente al azar, sería de esperar que esa cifra fuese del 25 por ciento: los primos deberían ser indiferentes al dígito final de sus vecinos.

Para las otras combinaciones de terminaciones aparecen patrones parecidos, que además se observan también en otras bases, al contar los números en unidades distintas de 10, lo cual quiere decir que lo observado no es consecuencia de nuestro sistema numérico, sino algo inherente a los números primos. Las desviaciones van estando más en línea con lo aleatorio a medida que los números se hacen más grandes (los dos matemáticos mencionados lo han comprobado con números de hasta unos cuantos billones), pero aun así siguen persistiendo.

De hecho es posible que el resultado no resulte tan sorprendente. A principios del siglo XX G. H. Hardy y John Littlewood, dos matemáticos que trabajaron juntos en la Universidad de Cambridge, encontraron una manera de estimar la frecuencia de aparición de parejas, triplas y agrupaciones más grandes de primos, lo que se conoce como la conjetura de las -tuplas. Esta conjetura no ha sido probada todavía, pero sugiere, igual que el resultado anterior, que la distribución de los primos no es completamente aleatoria, y estos últimos trabajos coinciden con esa predicción.

Aun así, para Soundararajan el hallazgo fue una experiencia saludable. «Fue muy extraño –dice–. Es como un cuadro que conoces muy bien, y de pronto te das cuenta de que en él hay una figura que no habías visto nunca hasta entonces».

La conjetura de Goldbach

La conjetura de Goldbach predice que todo entero par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos; por ejemplo, 10 = 3 +7, y 78 = 31 + 47. Curiosamente, no ha sido todavía demostrada desde que Christian Goldbach la formulara en 1742.

Sin embargo, en 2013 Harald Helfgott, de la École Normale Supérieure en París (Francia), demostró un resultado parecido: la conjetura débil de Goldbach, que establece que todo número impar mayor que 5 es la suma de tres primos. La demostración de la conjetura de Goldbach probaría también la versión débil, porque entonces podríamos tomar un número par formado por dos primos y sumarle 3 para obtener un número impar formado por tres primos. Pero no es probable que la demostración de Helfgott ayude a los matemáticos a ir en el otro sentido, de manera que el problema original de Goldbach sigue irresuelto.

5. π, ϕ, *e* e *i*

Más allá de las complejidades del cero y el infinito y de la música atomística de los primos, hay ciertos números que fascinan por el hecho de estar ahí, misteriosamente inherentes a la estructura de la realidad. En este capítulo investigamos cuatro de esos intrusos extraños y esenciales.

π: la razón más famosa

El 14 de marzo de cada año (3/14 en el formato usado en los Estados Unidos) los entusiastas de las matemáticas celebran el Día de Pi. Pi (o π, su habitual símbolo griego) es la razón matemática más ubicua. Definido como la circunferencia de un círculo dividida por el diámetro, su papel en la geometría determina su aparición en muchas fórmulas matemáticas para calcular la superficie, el área y el volumen de distintas formas.

Pero su influencia en las matemáticas y la física va mucho más lejos. Por ejemplo, π es un componente central de las transformadas de Fourier, utilizadas para descomponer y analizar ondas en electrónica y otros campos. También asoma en el principio de incertidumbre de Heisenberg en la mecánica cuántica, y en las ecuaciones de Albert Einstein de la relatividad general para describir la geometría del espacio y el tiempo. A la hora de describir cómo funcionan las cosas en el universo, es difícil no tropezar con π.

Los primeros dígitos de π son 3,14159265, pero, como es bien sabido, los dígitos de π no terminan ahí. π es un número irracional, lo que significa que su representación decimal no tiene fin. Sin embargo, no se necesitan infinitos decimales: la NASA utiliza únicamente unos quince dígitos de π en sus cálculos para enviar cohetes al espacio, y si se quiere medir el universo con una precisión del tamaño de un átomo se necesitan solo unos cuarenta decimales. Lo mismo que sucede en la carrera para encontrar los mayores números primos (véase el capítulo 4), los esfuerzos consagrados a calcular billones de dígitos de π tienen que ver más que nada con la gloria o con la exhibición de potencia de cálculo.

La longitud infinita de π significa que, en potencia, todo número que quepa imaginar se esconde en él en alguna parte: la fecha de nacimiento, el número de teléfono o incluso la cuenta bancaria. Utilizando un código que convierta números en letras podríamos encontrar, al menos en teoría, la Biblia, las obras completas de Shakespeare o cualquier libro jamás escrito, con tal de examinar suficientes dígitos.

π infinito

En noviembre de 2016, tras 105 días de cálculo sin descanso, el ordenador de Peter Trueb, un entusiasta de π, calculó finalmente 22 459 157 718 361 dígitos de π plenamente comprobados.

Los esfuerzos de Trueb, que durante el día es un científico de I + D, significan el descubrimiento de 9 billones de dígitos más detrás de la coma decimal, pulverizando el anterior récord mundial establecido en 2013. Hizo falta un ordenador con 24 discos duros, cada uno de ellos de 6 terabytes de memoria, para almacenar la ingente cantidad de datos producidos en cada etapa del proceso. Para hacer los cálculos utilizó un programa de ordenador llamado γ-cruncher, desarrollado por Alexander Yee y disponible gratuitamente en línea.

Yee, que desarrolló el γ-cruncher como *hobby* en la escuela, trabaja ahora para un fondo de inversión libre en Chicago. El programa utiliza lo que se denomina el algoritmo de Chudnovsky para calcular π. Es una fórmula matemática bastante complicada, pero lo que realmente hace que γ-cruncher sea útil es su capacidad para efectuar cálculos con billones de dígitos. Yee compara el problema con intentar multiplicar dos números de billones de dígitos en la pizarra. Simplemente no se podría. En su lugar ha introducido ingeniosos algoritmos para simplificar los cálculos.

Esta no es la primera vez que γ-cruncher establece récords mundiales para π, aunque en los casos anteriores Yee había tenido una participación directa. Esta vez le llegó completamente de sorpresa. La primera noticia que tuvo fue a través de un correo electrónico que recibió de Trueb diciéndole que había batido el récord mundial.

El archivo final con los 22 billones de dígitos de π tiene casi 9 terabytes. Impreso, ocuparía una biblioteca de varios millones de libros de mil páginas cada uno.

¿Normal o no?

Para que π codificara todo tendría que ser un número irracional «normal», y aún no sabemos si lo es. Si es normal, los dígitos 0 a 9 aparecerán con igual frecuencia en su representación decimal. Esto significa que cualquier número de un solo dígito aparecería un 10 por ciento de las veces, cualquier número de dos dígitos un 1 por ciento de las veces, etc.

Las probabilidades se hacen arbitrariamente pequeñas al buscar números de tantos dígitos como los correspondientes a las obras de Shakespeare, pero si π es normal acabaríamos dando con ellos. Hay mucha gente interesada en la cuestión de la normalidad de π, aunque la demostración de que π es o no normal probablemente tendrá poco impacto en el mundo real.

El último intento realizado, que en noviembre de 2016 calculó más de 22 billones de dígitos de π, apoya la idea de que es normal: cada uno de los dígitos del 0 al 9 aparecía un 10 por ciento de las veces. Pero establecer definitivamente la normalidad de π no se puede hacer a base de cálculos solamente; es necesaria una demostración matemática. Veintidós billones de dígitos podrá parecer que son un montón de pruebas a favor, pero comparado con la infinitud de π no son nada.

El papel central de π en geometría y matemáticas significa que aparece en los sitios más extraños:

• … en los cielos

Las estrellas sobre nuestras cabezas inspiraron a los antiguos griegos, que sin embargo es probable que nunca las utilizaran para calcular π. En 1994 Robert Matthews, de la Universidad de Aston en Birmingham, Reino Unido, combinó datos astronómicos con la teoría de números para hacer exactamente eso. Matthews utilizó el hecho de que en cualquier colección grande de números aleatorios la probabilidad de que dos cualesquiera no tengan ningún factor común es $6/\pi^2$. Dos números tienen un factor común si son divisibles por el mismo número, excluido el 1; así, por ejemplo, 4 y 15 no tienen ningún factor común, mientras que 12 y 15 tienen como factor común el 3.

Matthews calculó la distancia angular entre las 100 estrellas más brillantes del cielo y convirtió esas medidas en un millón de parejas de números aleatorios. Alrededor del 61 por ciento de ellas no tenían ningún factor común, lo que condujo a un valor de π de 3,12772, que es correcto al 99,6 por ciento aproximadamente.

• … en los meandros de un río

De vuelta a la Tierra, π controla el curso de los ríos, desde el Amazonas al Támesis (véase la figura 5.1). Los meandros de un río vienen descritos por su sinuosidad: la longitud a lo largo de su trayectoria dividida por la distancia desde el lugar de su nacimiento hasta la desembocadura en el océano a vuelo de pájaro. Resulta que el promedio de los ríos tiene una sinuosidad de aproximadamente 3,14.

Figura 5.1 Si dividimos la longitud del río promedio por la distancia, a vuelo de pájaro, entre el nacimiento y la desembocadura, el resultado es π.

• … en los libros

π ha servido de inspiración para una forma realmente intrincada de escritura creativa «constreñida» llamada *pilish.* Se trata de poemas –o «piemas»– en los que el número de letras de las sucesivas palabras viene determinado por π. Uno de los más ambiciosos «piemas» es la *Cadaeic Cadenza* de Mike Keith. Comienza con las líneas: *One/A poem/A raven,* correspondientes a 3,1415, y continúa durante 3835 palabras-dígitos. Keith también ha escrito un libro de 10 000 palabras con esta técnica.

• … en el salón de casa

π lo podemos calcular en casa con unas agujas y una hoja de papel pautado: dejamos caer las agujas sobre el papel y calculamos el porcentaje de ellas que cruzan una raya. Haciendo un número suficiente de ensayos, la respuesta debe ser la longitud de las agujas dividida por la separación entre las líneas, multiplicado todo ello por 2/π. Es lo que se conoce como el problema de la aguja de Buffon, llamado así por el matemático francés Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, que fue el primero en formularlo, en 1733. La teoría fue comprobada en 1901 por el matemático Mario Lazzarini, que utilizó 3408 agujas y obtuvo un valor de 3,1415929, que es correcto en las seis primeras cifras decimales. Una posterior comprobación de sus resultados sugiere sin embargo que Lazzarini podría haber manipulado las cosas, eligiendo la longitud de las agujas y la anchura de las líneas de manera que diesen como resultado 355/113, una conocida aproximación de π.

Entrevista: Michael Hartl y tau, némesis de π

Michael Hartl es doctor en física por el Instituto de Tecnología de California y autor del libro sobre desarrollo web: *Ruby on Rails Tutorial.* Hartl dice que es hora de acabar con π, porque, según él, hay otra constante matemática que cumpliría mejor su cometido.

¿Qué tiene de malo π?

Está claro que π no está «mal» en el sentido de ser incorrecto. Lo que ocurre es que es una opción confusa y poco natural para la constante del círculo. π es la circunferencia de un círculo dividida por su diámetro, y esta definición conduce a molestos factores de 2. Intentemos explicar a un niño de 12 años por qué el ángulo de un octavo de una pizza –una porción– es π/4 y no π/8.

Entonces, ¿qué habría que utilizar en lugar de π?

En 2010, en mi libro *The Tau Manifesto*, sugerí utilizar en su lugar la letra griega tau, que es igual a 2π, o 6,28318… Tau es la razón entre la circunferencia de un círculo y su radio, y este número aparece con asombrosa frecuencia en todas las matemáticas.

Si esta idea es tan fundamental, ¿por qué no hemos hecho el cambio?

El artículo que lanzó todo este tema, «Pi is Wrong!», del matemático Robert Palais, recoge la historia de π. La convención se adoptó solo en los últimos 300 años, y pienso que fue un error. Es uno de esos momentos de la historia en que se elige la convención equivocada.

El uso de tau ¿no arruina ecuaciones como la fórmula del área del círculo?

Todo lo contrario. Como ya demostré en *The Tau Manifesto,* utilizar tau revela relaciones matemáticas subyacentes que son oscurecidas por el uso de π. En particular, la famosa fórmula del área del círculo es el golpe de gracia del manifiesto.

¿Ha habido alguien que haya cambiado con éxito la notación?

En física hay una importante cantidad conocida como la constante de Planck, h. A medida que se desarrolló la mecánica cuántica se vio claro que h con barra, $\hbar$, era más importante, y $\hbar$ es igual a $h/2\pi$: ahí está el factor 2 que sale por todos los lados. $\hbar$ es ahora la notación estándar, aunque se utilizan ambas.

Se enfrenta usted con un enemigo formidable, porque π es una constante muy popular…

En efecto: hay libros enteros sobre él, y la gente se toma la molestia de memorizar decenas de miles de dígitos. Incluso Google ha cambiado su logo el Día de Pi.

La gente celebra π comiéndose una tarta [pie en inglés] el Día de Pi. ¿Cómo se va a celebrar el 26 de junio, el Día de Tau?

Tranquilos: si a uno le gustan las tartas, los manjares circulares del Día de Pi, el Día de Tau les trae ración doble.

ϕ: Fibonacci y el número áureo

Al matemático italiano Leonardo de Pisa, más conocido por el nombre de Fibonacci, lo mencionamos ya como la persona que trajo el cero a Europa (véase el capítulo 2), pero es más conocido por la sucesión que lleva su nombre, una secuencia de números que empieza por 1, 1 y en la que el número siguiente es siempre la suma de los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, etc.

Los números de Fibonacci están por todas partes en la naturaleza. Por ejemplo, el número de pétalos de una flor suele ser un número de Fibonacci. Esta extraña numerología es atribuible al comportamiento dinámico de las células en la punta de los brotes de crecimiento. Los primordios –pequeñas colecciones de células a partir de las cuales se desarrollan las características interesantes de las plantas– se distribuyen en configuraciones parecidas a espirales que se traslapan. La matemática de tales configuraciones conduce inevitablemente a números de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es un ejemplo de una sucesión completa. Todo entero positivo se puede expresar como la suma de términos de la secuencia, sin utilizar cada término más de una vez: 4 es 3 + 1, por ejemplo. Pero si calculamos la razón entre términos consecutivos, a medida que los términos se hacen más grandes, veremos que nos aproximamos cada vez más a un número concreto, cuyos primeros dígitos son 1,618.

Este misterioso número lleva el conocido nombre de número áureo o razón o proporción áurea, representado por la letra griega phi, ϕ, y aparece en multitud de contextos. Dibujemos la diagonal que une dos vértices de un pentágono regular. Dividamos la longitud de ese segmento por la longitud de los lados del pentágono y allí aparece. Algo análogo se puede hacer con un triángulo equilátero. En general, si A es menor que B, y fijamos los dos números de manera que la razón entre B y A sea la misma que entre A + B y B, la razón B/A será siempre igual al número áureo (véase la figura 5.2).

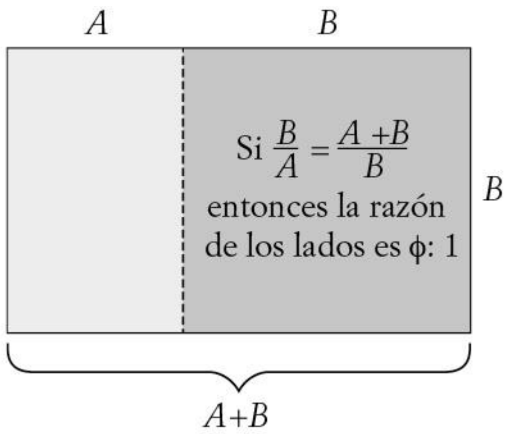


Figura 5.2 Las formas cuyas proporciones se ajustan a la razón áurea ϕ se dice que son especialmente agradables desde el punto de vista estético.

Si se busca «número áureo» o «razón áurea» en la red, se encontrará un sinfín de alusiones a su presencia en la arquitectura de la antigua Grecia y en el rostro humano, y al hecho de que la gente lo encuentra inmensamente agradable desde el punto de vista estético. Pero las pruebas no son claras. El cuerpo humano tiene miles de diferentes proporciones; algunas de ellas parecen próximas al número áureo en algunas personas. Los matemáticos y los arquitectos de la antigua Grecia conocían ciertamente el número áureo, pero las ruinas que quedan están un poco deterioradas y tienen multitud de proporciones distintas; si nos ponemos a buscar, encontraremos sin duda en algún sitio el número áureo, si es eso lo que queremos.

Un problema parecido es el de los estudios en los que se pide al sujeto mirar una serie de obras de arte (en algunas de las cuales aparece el número áureo) y decir luego si les parecen estéticamente agradables o no. No es evidente que el juicio emitido esté realmente relacionado con la razón áurea, y aunque así fuese, tampoco está claro si la asociación es aprendida o innata. De todos modos, se trata de un número hermoso.

e: exponentes y logaritmos

En el año 2004 Google anunció su intención de recaudar 2 718 281 828 dólares de la primera puesta a la venta de acciones suyas. La exactitud de la cifra dejó perplejos a muchos, pero los matemáticos asintieron con un gesto de complicidad. La cifra es uno de los números más importantes en matemáticas: los diez primeros dígitos del número de Euler e.

Junto con π, e transformó nuestra comprensión del concepto mismo de «número». Ambos números existen por derecho propio y están por todas partes en el mundo. El número e desempeña un papel central en la descripción de cómo se reproducen y crecen las cosas –el dinero y las poblaciones, por ejemplo– y también de cómo decrecen. Aparece, por ejemplo, en la ecuación que describe la desintegración radiactiva.

El número salió por primera vez a la luz en 1618, con los trabajos de los matemáticos John Napier y William Oughtred sobre las «reglas de cálculo», instrumentos que servían para multiplicar números grandes antes de la era de las calculadoras electrónicas. En 1683 el matemático Jacob Bernoulli redescubrió *e* al estudiar cómo aumenta una cuenta bancaria a medida que se añaden los intereses año tras año (véase el recuadro «*e* y el interés compuesto»). Pero fue el trabajo del genio suizo Leonhard Euler en el siglo XVIII lo que realmente colocó *e* en el centro del universo matemático.

El valor del número es efectivamente 2,718281828…, pero las definiciones matemáticas de *e* son más resbaladizas. Una de ellas dice que es el resultado de la expresión $(1 + 1/n)^n$ cuando n tiende a infinito. Euler demostró que la verdadera importancia de *e* estriba en su conexión con la operación matemática llamada exponenciación. La exponenciación, lo mismo que la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, es un modo fundamental de combinar números. Se escribe como *ab*, donde *a* es la base y *b* el exponente, y es fácil definirla para los enteros: por ejemplo, 4^3 es igual a 4 multiplicado tres veces por sí mismo: 4 × 4 × 4 = 64. Pero para exponentes que no son números enteros esta definición de la exponenciación evidentemente no funciona: ¿qué significa multiplicar una cosa por sí misma π veces, por ejemplo?

e *y el interés compuesto*

El número de Euler juega un papel fundamental en la manera en que crecen las cosas, como demostró por primera vez el matemático suizo Jacob Bernoulli.

Pongamos 1 euro en el banco. Si el interés anual fuese del 100 por ciento (¡ojalá!), un año después tendríamos 2 euros. Muy sencillo. ¿Pero qué ocurre si los intereses se calcularan con mayor frecuencia? Pongamos, por ejemplo, que el banco calcula los intereses al cabo de seis meses y nos da el 50 por ciento, con lo cual nuestro euro se convierte en 1,50 dólares. Después, al final del año, nos da otro 50 por ciento, haciendo un total de 2,25 euros: una pequeña mejora muy simpática.

Sigamos con la misma lógica, y si el interés se compone mensualmente terminaríamos con 2,61 euros. Si se compone diariamente, tendríamos 2,71. Pero por muy rápido que se componga el interés, hay una cantidad que nunca se sobrepasará: 2,718281828… euros, es decir, *e.*

Euler resolvió el problema encontrando una manera de definir e^x, donde x puede no ser entero, para luego demostrar cómo escribir cualquier número a^b en la forma e^x, dando una fórmula fácil para encontrar x en función de a y b. El hecho de que la exponenciación se puede extender a todos los números es una de las piedras angulares de las matemáticas y se basa en el número e.

La operación inversa a la exponenciación se llama tomar logaritmos. Si 4^3 es 64, entonces el logaritmo en base 4 de 64 es 3; análogamente, el logaritmo en base 10 de 100 es 2, porque $100 = 10^2$. En situaciones en las que hay cosas que crecen exponencialmente, los logaritmos proporcionan una manera útil de hacer los cálculos. La aparición natural de e en la fórmula de la exponenciación significa que los logaritmos en base e son especialmente fáciles de manejar; por ello se les conoce como logaritmos «naturales» (o neperianos).

Euler y su identidad

Leonhard Euler, que nació en Basilea (Suiza) en 1707, fue un erudito que escribió obras sobre órbitas planetarias, balística, construcción naval, navegación y cálculo infinitesimal, entre otras cosas. Pero sobre todo se le recuerda como pionero del análisis matemático, cuyas ideas fijaron la dirección de esa disciplina desde entonces.

Uno de sus logros más sorprendentes es la demostración de la fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$. Esta expresión se ha convertido en fundamental para la comprensión de los números y la exponenciación y es célebre por la manera tan bella en que reúne cinco constantes fundamentales de las matemáticas: 0, 1, e, π e i, la raíz cuadrada de −1.

Tras exponer una demostración de esta ecuación en una conferencia, se dice que Benjamin Peirce, matemático norteamericano del siglo XIX, dijo al auditorio: «Caballeros… es absolutamente paradójico; no podemos entenderlo y no sabemos lo que significa. Pero lo hemos demostrado, y por tanto sabemos que es verdad». El físico Richard Feynman, que fue Premio Nobel, la describió como «la fórmula más notable de las matemáticas».

Los números transcendentes

e y π son dos ejemplos de números transcendentes, una clase de números cuya desconcertante complejidad es la antítesis de los enteros de todos los días 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Los números transcendentes no se pueden escribir en forma de fracción: son irracionales, pero al mismo tiempo no guardan ninguna relación con los enteros a través de ninguna secuencia de operaciones aritméticas ordinarias. Un número trascendente podemos multiplicarlo por sí mismo las veces que queramos, combinar los números resultantes y dividirlos y multiplicarlos por enteros como nos plazca, que nunca volveremos al territorio familiar de los enteros.

Durante siglos nadie sospechó siquiera la existencia de objetos tan extraños. Los antiguos griegos creían que todos los números se podían derivar de los enteros por simple división. De acuerdo con la leyenda, hacia el año 500 a. C., cuando Hípaso de Metaponto demostró que algunos números, como la raíz cuadrada de 2, no se podían escribir como fracciones entre enteros, sus amigos los pitagóricos, enfurecidos, le ahogaron por hereje.

Pero los números irracionales, como la raíz cuadrada de 2, son mansos al lado de los transcendentes. Por definición, la raíz cuadrada de 2 multiplicada por sí misma es 2, de manera que volvemos a un entero al cabo de un solo paso. El primer número transcendente incuestionable fue descubierto en 1844 por el matemático francés Joseph Liouville, aunque la idea tiene sus raíces en trabajos anteriores de Euler.

Los números trascendentes podrían haber pasado como mera curiosidad de no haber sido porque otro matemático francés, Charles Hermite, demostró en 1873 que *e* es transcendente. Casi diez años más tarde se había añadido también π a la lista. Después el teórico conjuntista Georg Cantor dejó caer una bomba. Lejos de ser un puñado de anomalías exóticas, aunque importantes, el hecho es que casi todos los números son transcendentes: los transcendentes son infinitamente más numerosos que los no transcendentes.

Las consecuencias del trabajo de Cantor son profundas. Significa que los números que el cerebro humano y los ordenadores están equipados para manejar –los derivados fácilmente de los enteros– son solo una parte infinitesimal del universo numérico. Alrededor de los enteros y las fracciones pulula una colección infinitamente más grande de números transcendentes: la «materia oscura» del universo numérico.

i: el número imaginario

Los números transcendentes serían ya suficientes para transportarnos a otro plano, pero ¿y los números que son completamente imaginarios? Las reglas fundamentales de las matemáticas dicen que si se multiplican entre sí dos números positivos se obtiene otro positivo, y el producto de dos negativos es también positivo. En ese caso, ¿qué número multiplicado por sí mismo puede dar −1? Respuesta: un número imaginario.

Los números imaginarios estuvieron al acecho en las matemáticas desde el siglo XVI como mínimo. Surgieron al investigar los geómetras las soluciones a ecuaciones como las que tienen un término en x^2 o en x^3, algunas de las cuales parecían contener la raíz cuadrada de números negativos. En 1637 René Descartes llamó «imaginarios» a estos números. Su intención era despectiva, pero estos números, y su descripción, pervivieron. En el siglo XVIII fueron representados como múltiplos de *i*, la raíz cuadrada de -1.

i no es un «verdadero» número con el que podamos contar y medir cosas. No es posible determinar si es divisible por 2, ni si es menor que 10. Los números imaginarios no tienen cabida en la recta numérica normal, de manera que los matemáticos los colocaron en una segunda recta, independiente de la otra, que se corta con ella en el cero (véase la figura 5.3). Las dos rectas se pueden considerar como ejes, con lo cual los números «complejos», consistentes en una parte real y otra imaginaria, sirven para representar cosas que cambian en dos dimensiones. En geometría aparecen en las ecuaciones trigonométricas, y en física proporcionan una manera útil de describir rotaciones y oscilaciones. Los ingenieros electrotécnicos los utilizan continuamente en el diseño de circuitos de corriente alterna, y también son útiles para describir ondas luminosas y sonoras. Además, son herramientas esenciales en el diseño de microchips y algoritmos de compresión para el transporte y la reproducción de imágenes y música.

En un terreno más fundamental, los números complejos se utilizan en las funciones de onda, la descripción matemática de las partículas en la mecánica cuántica, donde justamente encarnan la idea de que las cosas pueden estar en dos lugares o estados a la vez. Estas múltiples personalidades están representadas por una serie de números complejos que describen la probabilidad de que una partícula cuántica tenga una propiedad particular como la posición o el momento. Si bien existen descripciones alternativas con números reales para cosas como las ondas luminosas en el mundo clásico, las matemáticas puramente reales no proporcionan las herramientas necesarias para representar el difuso mundo cuántico.

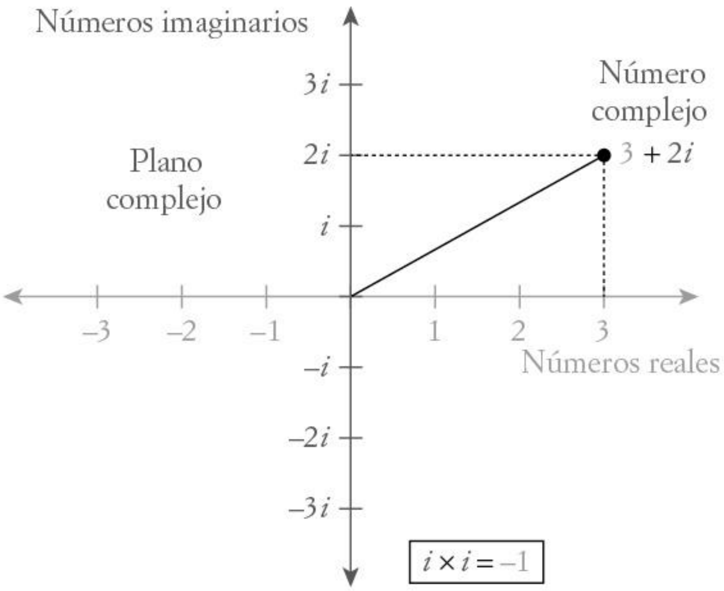


Figura 5.3 Los números complejos, que contienen una parte real y otra imaginaria basada en la raíz cuadrada de -1, designada por *i*, están situados en algún punto de un «plano complejo» 2D.

Y la verdad es que tanto los números «reales» como los «imaginarios» son en cualquier caso conceptos abstractos. Quizás estemos más familiarizados con 5 que con 5*i*, pero ninguno de los dos existe por su cuenta en el mundo real. Esto otorga a los matemáticos una cierta licencia creativa. En 1843 el matemático irlandés William Hamilton inventó soluciones adicionales para la raíz cuadrada de -1, a las que llamó *j* y *k*. Los números 4D que construyó sobre esa base, conocidos como cuaterniones, se utilizan para codificar rotaciones 3D en algunos juegos de ordenador.

Siguiendo la misma lógica matemática, no hay razón para detenerse ahí. Hoy día, los octoniones añaden otras siete dimensiones de números imaginarios, y los sedeniones, raramente utilizados, dan la opción de extender el total a 15. Allá arriba hay todo un mundo de pura imaginación.

6. Probabilidad, aleatoriedad y estadística

Vivimos en un mundo incierto, pero también en el mundo de la incertidumbre pueden ayudarnos los números a entender las cosas. Claro está, siempre y cuando seamos capaces de entender los números. El mundo de la probabilidad y la estadística está lleno de resultados nada intuitivos que pueden inducir a error a los incautos.

Cómo discurrir en materia de probabilidades

La idea fundamental de la probabilidad es muy sencilla. Es la medida de las posibilidades de que algo vaya a ocurrir o no, y se le asigna un valor entre 0 y 1, donde 0 significa que nunca ocurrirá y 1 significa que es seguro que va a ocurrir. Los valores de la probabilidad se expresan también a menudo como porcentajes entre 0 y 100 por cien. Pero fuera de esos hechos elementales, la probabilidad es una de esas cosas en las que todos cometemos errores…, y errores muy grandes. La buena noticia es que no somos los únicos. Incluso los matemáticos de profesión dicen que la probabilidad tiene muchas respuestas que no son nada lógicas.

Pensemos en el clásico problema de un curso de 25 alumnos. ¿Qué probabilidad hay de que dos de ellos tengan el mismo cumpleaños? La respuesta intuitiva, de sentido común, es que esa coincidencia, sin ser inverosímil, es bastante improbable. Error.

Antes de desvelar la respuesta, veamos el célebre problema de Monty Hall, así llamado por el antiguo presentador del juego de la televisión norteamericana *Let’s Make a Deal* [‘Hagamos un trato’]. En el juego hay tres puertas, una de ellas esconde un coche, las otras dos, sendas cabras. El participante elige una puerta; el presentador abre entonces otra, en la que se ve una cabra. Suponiendo que se prefiere ganar el coche y no una cabra, ¿se debería seguir con la elección inicial o cambiar de puerta? La respuesta ingenua es que da igual: que la probabilidad de acertar con la elección que hemos hecho inicialmente es de 50-50. Error (véase la figura 6.1).

Pero si las probabilidades hacen fruncir el ceño incluso a los expertos, ¿cómo llegar a la solución correcta? Muy sencillo, dice el matemático Ian Stewart, de la Universidad de Warwick: haciendo las cosas por la vía difícil. Es decir, desconectando la intuición, pensando detenidamente sobre cómo está planteado el problema y haciendo bien los cálculos.

En el problema de los cumpleaños, el punto de partida es percatarse de que lo que nos interesa no son los alumnos individuales, sino las parejas de alumnos. En una clase de 25 hay 300 parejas distintas, y en los años no bisiestos hay 365 días en los que compartir cumpleaños. Teniendo todo eso en cuenta, terminamos triturando algunos números verdaderamente astronómicos para llegar a la respuesta, que es un poco inferior al 57 por ciento. Dicho con otras palabras, es más probable que haya dos alumnos con el mismo cumpleaños que no lo contrario: una derrota importante para la intuición.

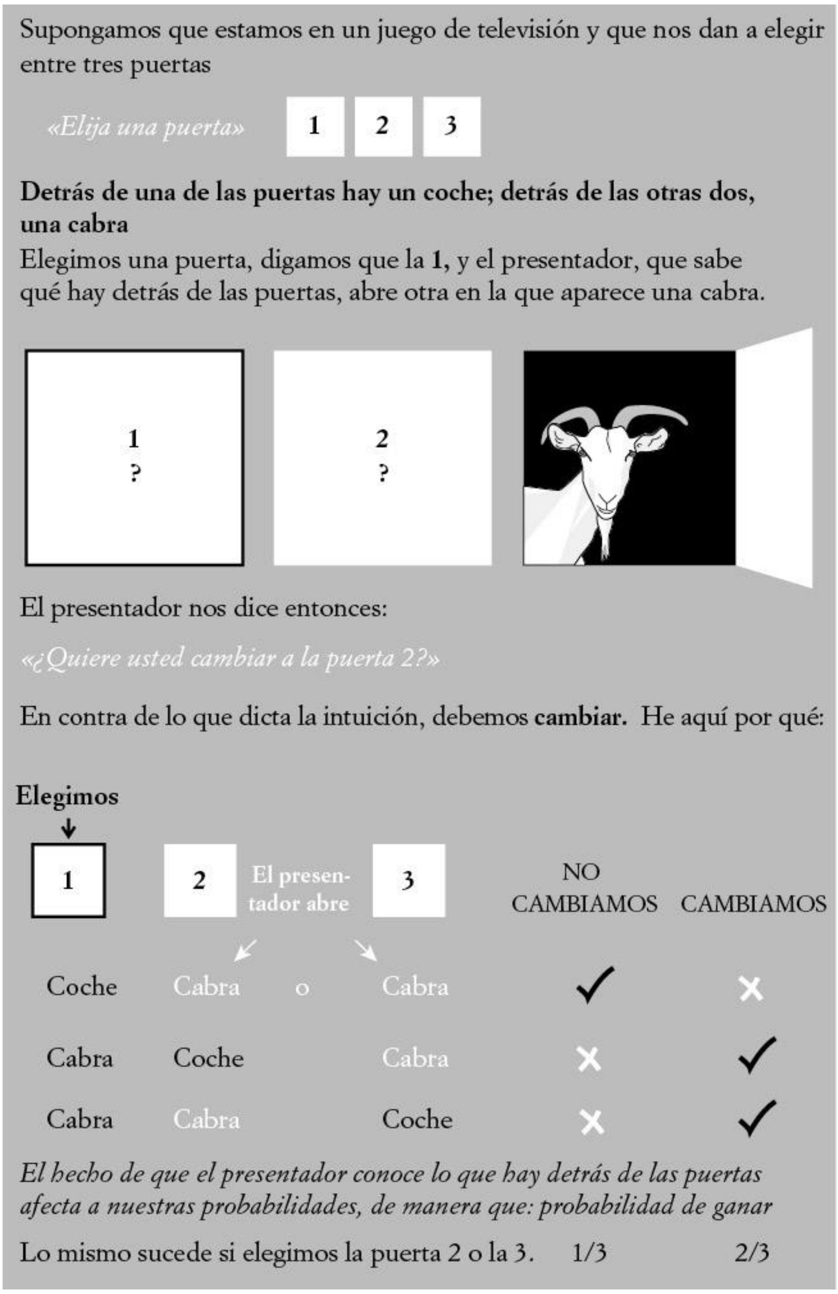


Figura 6.1 El problema de Monty Hall ejemplifica la naturaleza poco intuitiva de algunos resultados en el campo de la probabilidad.

En cuanto al problema de Monty Hall, la probabilidad de elegir en primer lugar la puerta del coche es de 1/3, y eso no cambia ocurra lo que ocurra después. La probabilidad de que el coche se encuentre detrás de una de las otras dos puertas es de 2/3. Y como el presentador ha mostrado una cabra detrás de una de ellas, esa probabilidad de 2/3 se aplica ahora a la única puerta cerrada, de modo que nos conviene cambiar de puerta.

Un par de advertencias: si el presentador es tan retorcido como para solo abrir una puerta si elegimos la buena de entrada, sería una locura cambiar. Lo mismo si queremos una cabra en lugar de un coche. Eso ilustra otra regla importante al discurrir sobre probabilidades, dice John Haigh, matemático de la Universidad de Sussex en Brighton, Reino Unido: es muy importante conocer los supuestos que se manejan. Cambios muy sutiles pueden modificar el resultado.

Todo esto está muy bien cuando los límites del problema están claros y los posibles resultados son cuantificables. Tiramos al aire una moneda no trucada y sabemos que la probabilidad de que salga cara es del 50 por ciento, porque en caso necesario es posible repetir el ejercicio una y otra vez.

Pero ¿qué decir de una probabilidad del 50 por ciento de que llueva hoy, o de que un caballo con iguales apuestas a favor y en contra gane una carrera? No hay ningún consejo de expertos que nos pueda ayudar a estimar el verdadero valor de tales probabilidades «subjetivas», que son fluidas y están basadas a menudo en conocimientos técnicos inescrutables o en complejos modelos de un mundo impredecible. Y eso pone de relieve una verdad que a menudo se pasa por alto en el campo de las probabilidades: no hay ninguna forma establecida de calcularlas.

Probabilidad frecuentista y probabilidad bayesiana

Estamos en el bar y acordamos tirar una moneda para ver quién paga la siguiente ronda. Cara, pago yo; cruz, pagas tú. ¿Qué probabilidad tengo de tomarme una cerveza gratis? La mayoría de la gente –al menos la que esté sobria– estaría de acuerdo en que es del 50 por ciento.

Ahora tiro la moneda al aire, la cazo y la guardo escondida en la mano. ¿Cuál es ahora la probabilidad de una cerveza gratis? Hablando en términos generales, hay dos respuestas: (1) sigue siendo del 50 por ciento, a menos que tengamos razones para pensar otra cosa; (2) asignar una probabilidad a un suceso que ya se ha producido no tiene sentido. Cuál de las dos respuestas elijamos revelará nuestra posición en un debate que dura ya 250 años sobre la naturaleza de la probabilidad y la estadística: la disputa entre la estadística frecuentista y la bayesiana.

Extraer conclusiones sin disponer de todos los datos es el pan nuestro de cada día de la estadística. ¿Cuántas personas en un país apoyan la legalización del cannabis? Imposible preguntar a todas ellas. Una sucesión de veranos más cálidos ¿es compatible con la variabilidad natural o es una tendencia? Imposible mirar al futuro para dar una respuesta definitiva.

Las respuestas a preguntas como esas van generalmente unidas a una probabilidad. Pero esa cifra enmascara a menudo una distinción crucial entre dos clases diferentes de incertidumbre: cosas que no sabemos y cosas que no podemos saber. La incertidumbre del tipo «no podemos saber» resulta de procesos del mundo real cuyos resultados parecen aleatorios: cómo rueda un dado; dónde se para la rueda de la ruleta; exactamente cuándo va a desintegrarse un átomo en una muestra radiactiva. Ese es el mundo de la probabilidad frecuentista: si rodamos un número suficiente de dados u observamos la desintegración de un número suficiente de átomos, podemos hacernos una idea razonable de la probabilidad de los diferentes resultados.

La incertidumbre del tipo «no sabemos» es más complicada. Lo que está aquí en juego es la ignorancia individual, no el azar universal. Dos ejemplos: el sexo de un ser recién concebido y el ganador de una futura carrera de caballos. Las incertidumbres del tipo «no sabemos» son las predilectas de los corredores de apuestas.

Un frecuentista estricto no quiere saber nada de la incertidumbre del tipo «no sabemos» ni de ninguna medida de probabilidad que no se pueda derivar de experimentos repetibles, de generadores de números aleatorios, de encuestas de una muestra aleatoria de la población y similares. Un bayesiano, por su parte, no tiene miedo de utilizar otras probabilidades *a priori* o *priors* (datos sobre la forma mostrada por un caballo en carreras anteriores, por ejemplo) para rellenar las lagunas.

El ejemplo del lanzamiento de una moneda en el bar muestra dónde divergen las dos posiciones. Antes de lanzar la moneda, las probabilidades frecuentista y bayesiana coinciden: 50 por ciento. Después del lanzamiento, la fuente de incertidumbre cambia, de aleatoriedad intrínseca a ignorancia personal. Si nos inclinamos por la manera bayesiana de trabajar, podríamos dar una cifra de probabilidad del 50 por ciento… o puede que menos si un rictus o una sonrisa de victoria en el rostro del adversario nos aconseja revisar nuestras posibilidades a la baja. Los bayesianos intentan resolver los problemas reuniendo todos los indicios relevantes, aun cuando la contribución de algunos de ellos dependa de juicios subjetivos.

La controversia bayesiana

El bayesianismo se llama así por Thomas Bayes (1702-61), matemático y ministro presbiteriano inglés (véase la figura 6.2). En un ensayo publicado en 1763, dos años después de su muerte, expuso un nuevo planteamiento de un problema fundamental: cómo retroceder desde las observaciones hasta las causas ocultas cuando la información es incompleta.

Imaginemos que tenemos una caja de doce rosquillas, unas rellenas de crema y otras de mermelada. Calcular la probabilidad de extraer al azar cinco rosquillas de mermelada seguidas es relativamente fácil. Pero el problema inverso, el de calcular el probable contenido de una caja desconocida después de sacar al azar cinco rosquillas de mermelada seguidas, tiene más intríngulis. La innovación de Bayes consistió en proporcionar la semilla de un marco matemático que permite comenzar con una conjetura (quizás hayamos comprado antes otras cajas de rosquillas en esa tienda) y afinarla a medida que se dispone de más datos.

A finales del siglo XVIII y principios del XIX los métodos de estilo bayesiano ayudaron a resolver una serie de problemas inabordables, desde estimar la masa de Júpiter hasta calcular el número de niños nacidos en todo el mundo por cada niña. Pero los métodos bayesianos fueron cayendo poco a poco en desgracia, víctimas de una incipiente era de macrodatos (*big data*). Todo, desde mejores observaciones astronómicas hasta cuadros estadísticos de mortalidad, enfermedad y delincuencia recién publicados, transmitía un aire tranquilizador de objetividad. Frente a eso, los métodos de Bayes basados en conjeturas bien fundamentadas parecían irremediablemente anticuados y poco científicos. La probabilidad frecuentista, con su énfasis en la trituración desapasionada de números obtenidos del resultado de experimentos aleatorizados, se puso cada vez más de moda.

El advenimiento, a principios del siglo XX, de la teoría cuántica, que expresaba la realidad en el lenguaje de la probabilidad frecuentista, dio un nuevo impulso a esa evolución. Las dos líneas de pensamiento estadístico se fueron separando de manera gradual. Los partidarios de una y otra terminaron enviando sus trabajos a sus propias revistas, asistiendo a sus propias conferencias e incluso formando sus propios departamentos universitarios.

Las emociones subieron a menudo de nivel. La escritora Sharon Bertsch McGrayne recuerda que cuando inició las investigaciones preliminares para su libro sobre la historia de las ideas bayesianas, *La teoría que nunca murió,* un estadístico partidario de la línea frecuentista la reprendió por teléfono por intentar legitimar el bayesianismo. Por otro lado, algunos bayesianos cayeron víctimas de una especie de complejo de persecución, y otros, de una especie de fanatismo religioso.

Se trata de algo más que de un problema esotérico. Larry Wasserman, de la Universidad Carnegie Mellon en Pittsburgh, Pensilvania, sostiene que el debate frecuentista–bayesiano afecta a la vida de todos: una empresa farmacéutica que esté probando un nuevo medicamento puede llegar a conclusiones muy diferentes según el método que utilice para analizar los resultados, y un jurado puede que llegue a sentencias distintas según escuche la evidencia presentada en términos frecuentistas o bayesianos.

Figura 6.2 Supuesto retrato de Thomas Bayes, creador de la probabilidad bayesiana; no es seguro que sea de él, porque no se dispone de ningún otro retrato suyo.

Caballos de carreras

Los dos enfoques, el frecuentista y el bayesiano, tienen sus ventajas y sus inconvenientes. Cuando los puntos de datos son escasos y hay pocas posibilidades de repetir el experimento, los métodos bayesianos pueden ser muy eficaces a la hora de extraer información. La explosión en 1987 de una supernova en una galaxia cercana, en la Gran Nube de Magallanes, brindó la oportunidad de contrastar teorías mantenidas desde hacía tiempo sobre el flujo de neutrinos en sucesos de ese tipo, pero los detectores captaron solo 24 de estas huidizas partículas. Sin datos, los métodos frecuentistas quedaban descartados, mientras que el enfoque bayesiano, flexible y prestatario de información, proporcionó una manera ideal de evaluar diferentes teorías rivales.

En este caso ayudó el hecho de contar con teorías bien fundamentadas que proporcionaban buenas probabilidades a priori para comenzar el análisis. Cuando no existen esas probabilidades, el análisis bayesiano puede convertirse fácilmente en un caso de «basura de entrada, basura de salida». Es una de las razones por las que los tribunales de justicia se han mostrado remisos a adoptar métodos bayesianos, aunque a primera vista son una forma ideal de sintetizar pruebas no claras procedentes de muchas fuentes. En un caso de paternidad visto en Nueva Jersey en 1993 utilizando estadística bayesiana, el tribunal decidió que los miembros del jurado utilizaran sus propias probabilidades personales a priori para estimar la probabilidad de que el acusado fuera el padre del niño, aunque esto hacía que cada miembro del jurado tuviese una diferente estimación estadística final de la culpabilidad.

Encontrar buenas probabilidades a priori puede también exigir una profundidad de conocimiento imposible. Un investigador que trata de determinar la causa de la enfermedad de Alzheimer, por ejemplo, podría examinar 5000 genes. Los métodos bayesianos requerirían disponer de 5000 probabilidades a priori para la posible contribución de cada gen, más otros 25 millones si quisiera buscar pares de genes actuando conjuntamente. Generar una probabilidad a priori razonable a partir de un problema de tantas dimensiones sería prácticamente imposible.

Para ser justos hay que decir que, en ausencia de todo tipo de información de fondo, los métodos frecuentistas estándar consistentes en analizar multitud de pequeños efectos genéticos tendrían dificultades para hacer que los genes y las combinaciones de genes verdaderamente importantes afloraran a la superficie. Pero quizá sea más fácil abordar ese problema que conjurar 25 millones de conjeturas bayesianas coherentes.

En general, el frecuentismo funciona bien cuando se manejan muchos datos que hablan de la manera más objetiva posible. Un ejemplo sobresaliente es la búsqueda del bosón de Higgs, completada en 2012 en el laboratorio de física de partículas CERN cerca de Ginebra, Suiza. Los equipos de análisis concluyeron que, si de hecho no existiese el bosón de Higgs, una configuración de datos tan sorprendente o más que la observada cabría esperarla en solo uno de 3,5 millones de hipotéticos ensayos repetidos. Eso es tan improbable que el equipo decidió rechazar la idea de un universo sin bosón de Higgs.

La formulación utilizada parece retorcida, y eso pone de relieve la principal debilidad del frecuentismo: las vueltas que tiene que dar debido a su desprecio hacia todo lo que sean incertidumbres del tipo «no sabemos». El bosón de Higgs o existe o no existe, y cualquier incapacidad para optar por una cosa u otra se debe simplemente a la falta de información. Un frecuentista estricto no puede pronunciarse directamente sobre la probabilidad de que exista o no, cosa que efectivamente los investigadores del CERN tuvieron cuidado de no hacer (aunque algunos sectores de los medios de comunicación y demás se sintieron más libres en ese sentido).

La comparación directa entre dos opciones apunta a las confusiones que pueden surgir en este terreno, como ocurrió en los años noventa con una controvertida prueba clínica de dos medicamentos para el infarto de miocardio: la estreptoquinasa y el activador tisular plasminógeno. El primer análisis, frecuentista, dio un «valor p» de 0,001 a un estudio que aparentemente demostraba que sobrevivían más pacientes con la nueva terapia, más cara, del activador tisular plasminógeno. Eso equivale a decir que si los dos medicamentos tuviesen la misma tasa de mortalidad, entonces unos datos al menos tan extremos como las tasas observadas ocurrirían solamente una vez de cada 1000 ensayos repetidos.

¿Qué significa eso? No que los investigadores estuviesen seguros al 99,9 por ciento de que el nuevo medicamento era superior, aunque muchas veces se interpreta así. Cuando otros investigadores llevaron a cabo un nuevo análisis bayesiano utilizando los resultados de ensayos clínicos previos como probabilidades a priori, encontraron que la probabilidad directa de que el nuevo fármaco fuera superior era de solo un 17 por ciento. Como dice el estadístico David Spiegelhalter, de la Universidad de Cambridge, el verdadero valor del bayesianismo es que aborda directamente la probabilidad de que la pregunta de interés sea cierta. «¿Quién no va a querer hablar de eso?».

A veces se pueden combinar las ideas bayesianas con las frecuentistas para crear algo nuevo. En grandes estudios de genómica, un análisis bayesiano podría explotar el hecho de que un estudio que evalúe los efectos de 2000 genes es casi igual que 2000 experimentos paralelos, y luego hacer una fertilización cruzada de los análisis utilizando los resultados de algunos de ellos para establecer probabilidades a priori para otros y afinar así las conclusiones de un análisis frecuentista.

Aleatoriedad

Las probabilidades se utilizan para comprender los fenómenos aleatorios, en los que es imposible conocer el resultado de un suceso en particular. El lanzamiento de una moneda es un ejemplo clásico. El que un lanzamiento concreto termine en cara o en cruz es aleatorio, y no hay nada que nos permita saber qué va a salir. Pero observando un gran número de lanzamientos a lo largo del tiempo podemos empezar a ver más claro el problema: con una moneda no trucada se ve que las caras y las cruces aparecen un 50 por ciento de las veces cada una.

Hay muchos fenómenos naturales que son aleatorios; el problema es que nuestro cerebro no lo es. Estamos cableados para detectar y generar pautas. Eso es útil a la hora de divisar predadores en la sabana antes de que ellos nos vean, pero supone un hándicap cuando nos enfrentamos con fenómenos aleatorios. Por otro lado, nos hace muy difícil generar aleatoriedad nosotros mismos. La auténtica aleatoriedad es útil, por ejemplo, para diseñar claves de encriptación seguras, así como en muchas áreas de la computación, el modelado científico y el diseño. Si queremos auténtica aleatoriedad, es necesario disponer de una manera de generar números aleatorios.

Una posibilidad sería lanzar una moneda para generar una cadena aleatoria de unos y ceros; pero el proceso es tedioso, y hay efectos sistemáticos –como ligeras descompensaciones de la moneda– que pueden hacer que los resultados no sean realmente aleatorios. Los primeros dados utilizados en las artes adivinatorias y en los juegos eran tabas (huesos de la pata de una oveja) con números grabados en cada una de sus seis caras. La forma de la taba hacía que algunos números fuesen más probables que otros, lo cual proporcionaba una ventaja decisiva al conocedor de sus propiedades. La sospecha sobre la fiabilidad de los generadores de aleatoriedad sigue cerniéndose sobre las versiones modernas de las tabas: los dados de los casinos, las ruedas de ruleta y las bolas de lotería.

Los modernos generadores de números aleatorios utilizan un algoritmo fijo para producir un resultado aparentemente aleatorio. Con un valor inicial, o «semilla», y a partir de un input más pequeño e impredecible, como por ejemplo la fecha y la hora, se determinan los dígitos aleatorios a extraer de una cadena de números aleatorios (como por ejemplo π), siguiendo a partir de ahí. El problema es que esos números «pseudoaleatorios» están limitados por el input, y al cabo de cierto tiempo tienden a repetirse de una forma no aleatoria que se puede determinar a la vista de un número suficiente de ellos.

Otra posibilidad es conectar un ordenador a una fuente de «verdadera» aleatoriedad, de aleatoriedad física. En los años cincuenta el Servicio de Correos del Reino Unido necesitaba una manera de generar cantidades industriales de números aleatorios para determinar los ganadores de la lotería Premium Bonds (bonos del Estado que permiten participar en un sorteo de lotería). El encargo recayó en los diseñadores de la calculadora Colossus, que fue concebida para descifrar los códigos de la Alemania nazi durante la guerra. El resultado fue ERNIE (*Electronic Random Number Indicator Equipment*), que, utilizando las trayectorias caóticas de los electrones al pasar por un tubo de neón, producía una serie temporalmente aleatoria de impulsos electrónicos que servía de semilla para un número aleatorio. ERNIE, que se encuentra actualmente en su cuarta versión, utiliza hoy el ruido térmico de transistores para generar la aleatoriedad. Muchas aplicaciones informáticas modernas utilizan una fuente similar, con unidades generadoras sobre un chip.

Sigue habiendo dos problemas. Primero, con suficiente potencia de cálculo cualquiera puede en teoría reconstruir los procesos de la física clásica que produjeron o iniciaron los números aleatorios. Segundo, y en un terreno más práctico, los generadores de números aleatorios basados únicamente en procesos físicos son a menudo incapaces de producir bits aleatorios suficientemente deprisa.

Muchos sistemas, como las plataformas basadas en Unix utilizadas por Apple, resuelven el primer problema combinando el output de generadores de aleatoriedad sobre chip con los contenidos de un «*pool* de entropía» lleno de otras contribuciones aleatorias, que pueden ser desde ruido térmico en dispositivos conectados al ordenador hasta las temporizaciones aleatorias de las pulsaciones del usuario en el teclado. Los componentes se combinan luego utilizando una «función *hash*» para generar un único número aleatorio. Las funciones *hash* son el equivalente matemático de revolver tinta en el agua: a la vista del número que arroja la función, no hay manera de saber cuál fue el conjunto de inputs. Lo cual no excluye que en el futuro se encuentre la manera de saberlo. Y luego queda también el problema de la rapidez. La solución consiste generalmente en utilizar un generador de números aleatorios como semilla de un programa que genera un flujo más abundante.

Ahora bien, todo programa significa reglas. Su output no puede ser verdaderamente aleatorio, y en principio cualquiera que conozca el código puede adivinarlo. La naturaleza exacta de los métodos que utilizan los programas de generación de números aleatorios está patentada, pero en 2013 los analistas en temas de seguridad manifestaron su preocupación por el hecho de que la Agencia Nacional de Seguridad de los Estados Unidos conocía el funcionamiento interno de uno de esos generadores, llamado Dual_EC_DRGB, con lo cual en potencia podía descifrar los códigos basados en ellos. Si lo único que hacemos es jugar juegos en línea, eso no supone un gran problema. Pero si se trata de transacciones financieras de muchos miles de millones de dólares o de la encriptación de documentos secretos, la sospecha de estar vigilados es un asunto más grave.

Aleatoriedad cuántica

Hay investigadores que opinan que nunca dispondremos de una fuente indescifrable de aleatoriedad mientras nos basemos en el mundo clásico. En el mundo clásico, la aleatoriedad no es intrínseca, sino que depende de quién tiene qué información. Para una encriptación más segura hay que recurrir a la física cuántica, donde las cosas parecen ser realmente aleatorias.

En lugar de lanzar una moneda, cabría preguntar si el fotón que chocó con un espejo semiplateado pasó a través de él o fue reflejado. En lugar de tirar un dado, podríamos presentar a un electrón la elección de pasar por uno de seis circuitos.

Existen sistemas criptográficos que explotan los caprichos de la teoría cuántica para una comunicación más segura. Pero no son la última palabra en seguridad. Extraer aleatoriedad cuántica siempre necesita de alguien que tome decisiones no aleatorias sobre el equipo, las medidas y similares. La eficiencia menos que perfecta de los detectores de fotones utilizados en algunos métodos podría abrir también una puerta trasera a la no aleatoriedad.

Una solución que todavía se está investigando es amplificar la aleatoriedad cuántica, de manera que tuviésemos siempre más aleatoriedad de la que cualquiera puede jaquear. En teoría existen maneras de convertir n bits aleatorios en 2^n bits de pura aleatoriedad, y también de blanquear los bits a fin de eliminar cualquier correlación con el dispositivo que los creó. La cuestión sigue siendo cómo poner estos métodos en práctica.

Mentiras, malditas mentiras y...

En 1946 el epidemiólogo británico Austin Bradford Hill organizó las primeras pruebas clínicas en las que los participantes eran asignados aleatoriamente a dos grupos, uno que recibía tratamiento y el otro no. Una de las pruebas estudiaba la eficacia del antibiótico estreptomicina para tratar la tuberculosis, una enfermedad que el propio Bradford Hill había contraído mientras servía en la Primera Guerra Mundial.

Al cabo de seis meses, los resultados eran tan convincentes que se adoptó la estreptomicina como terapia convencional. En 1950, Bradford Hill, junto con Richard Doll, fue uno de los primeros en utilizar métodos estadísticos para aportar las primeras pruebas convincentes del nexo causal entre fumar y el cáncer de pulmón.

Hoy día, ya se trate de los ensayos del último medicamento milagroso o del descubrimiento del bosón de Higgs, los avances que promueven el conocimiento humano rara vez se hacen sin que alguien en algún lado aplique un razonamiento estadístico. Y a medida que estos elementos de conocimiento se filtran al resto de la población, se espera cada vez más que se tomen las decisiones sobre la base de la estadística.

La salud humana es un área especialmente cargada de tensión que atrae no pocos titulares estridentes basados en estadísticas: que si un determinado aspecto del estilo de vida aumenta en un 50 por ciento la probabilidad de una forma concreta de cáncer, o que si una cura milagrosa la reduce en una proporción parecida. Aun en el caso de que las estadísticas correspondientes sean ciertas, los errores de interpretación pueden enturbiar el juicio que nos formemos a partir de ellas. Por ejemplo, a menudo se lee que determinada prueba es fiable al *x* por ciento, sin percatarnos de que esa cifra carece de sentido a menos que conozcamos también la tasa de falsos positivos de la prueba (véase la figura 6.3). Y hay muchas otras maneras en que estadísticas incompletas o mal concebidas pueden inducir a error, como muestran los ejemplos siguientes.

El sesgo de las proporciones

¿Qué es más preocupante: que nos digan que el cáncer mata a 25 personas de cada 100 o que mata a 250 de cada 1000? Pregunta estúpida, cabría decir; los dos enunciados significan que un cuarto de la gente morirá de cáncer. Pero en momentos de inatención se tiende a ver lo segundo como equivalente a un mayor riesgo.

En un estudio de este efecto del «sesgo de la proporción», la gente atribuía más riesgo al cáncer cuando se le decía que «mata a 1286 personas de cada 10 000» que cuando se le decía que «mata a 24,14 personas de cada 100», a pesar de que la segunda afirmación equivale a casi el doble de riesgo. Análogamente, 100 personas víctimas de una forma particular de cáncer cada día puede percibirse como un riesgo más pequeño que 36 500 víctimas de la misma enfermedad al año, aunque ambas cosas son equivalentes.

Ante cuestiones relacionadas con el riesgo tenemos por tanto que mirar con cuidado la manera en que se presentan las cifras. Y si estamos comparando riesgos, hay que asegurarse de que están divididos por el mismo denominador.

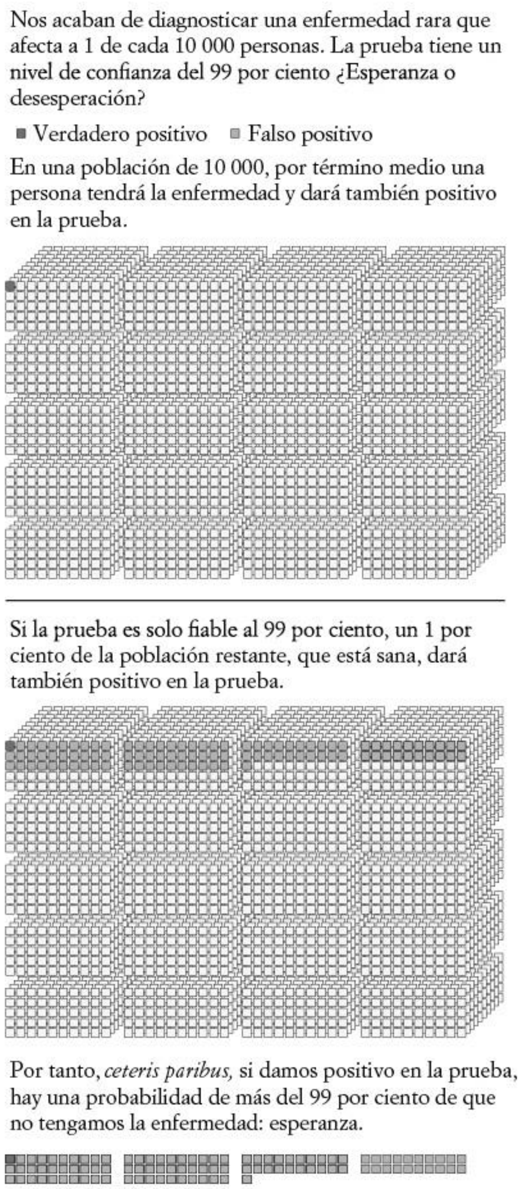


Figura 6.3 Los falsos positivos en pruebas de detección pueden llevar a una estimación errónea de la probabilidad de tener la enfermedad.

Riesgo relativo frente a riesgo absoluto

El descubrimiento en 2007 de que un bocadillo diario de beicon aumenta la probabilidad de cáncer de intestino en un 20 por ciento fue deliciosamente encapsulado por el tabloide británico *The Sun* en el titular «El consumo alegre de porcino cuesta vidas». Tales asertos pueden ser válidos o no, pero ocultan una fuente más insidiosa de confusión. Suelen citar riesgos relativos, es decir: cuánto más probable es enfermar por culpa de la sustancia o actividad supuestamente peligrosa en comparación con la situación contraria. Pero no nos dicen nada sobre lo que ese aumento del riesgo supone en términos absolutos, de manera que no hay ninguna manera de saber si es algo de lo que vale la pena preocuparse.

Para la persona media, la probabilidad de tener cáncer intestinal en algún momento de la vida es de un 5 por ciento. De manera que un aumento relativo del 20 por ciento en el riesgo de cáncer de intestino equivale a un aumento absoluto del riesgo del 5 o el 6 por ciento: solo un 1 por ciento. La cifra es suficientemente grande como para no ignorarla, pero no tan disuasoria para aquellos a quienes les gusta su bocadillo diario de beicon (véase la figura 6.4).

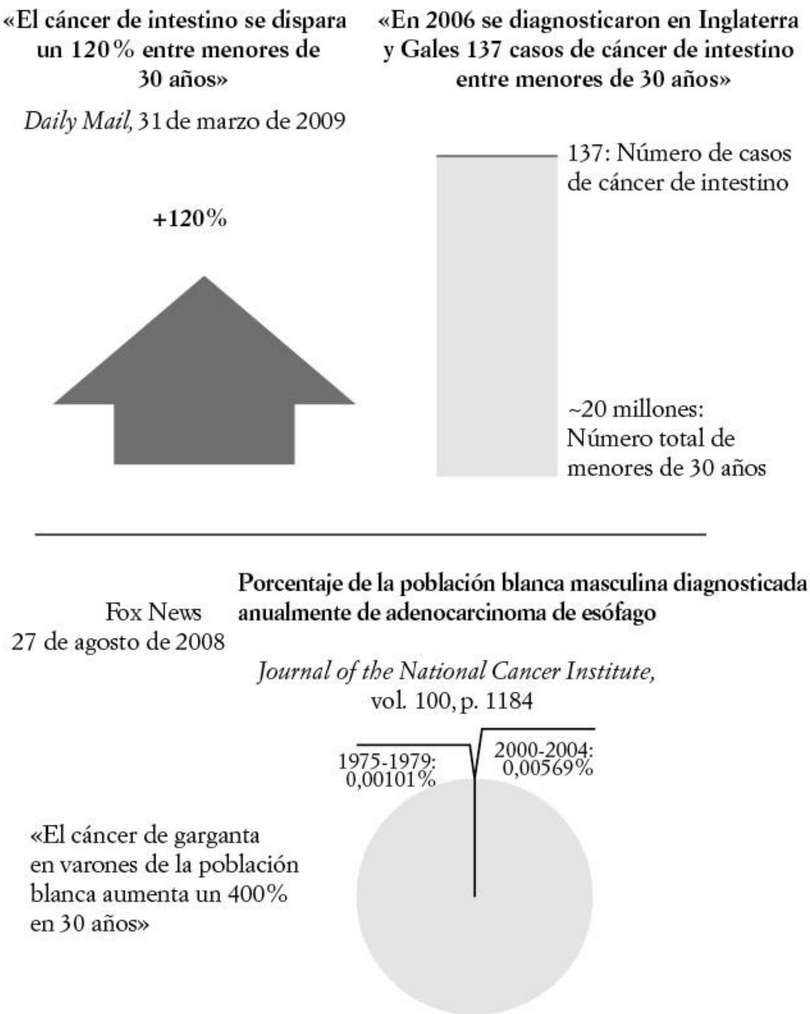


Figura 6.4 Diferentes maneras de presentar los mismos datos pueden influir mucho en la percepción del riesgo.

Causación *versus* correlación

En 2010 saltó a los titulares un estudio titulado «Tiempo delante de la televisión y mortalidad». En el estudio se había interrogado a 8800 personas acerca de su salud, estilo de vida y hábitos de ver la televisión, con un seguimiento de seis años. En ese tiempo murieron 284 de ellas. Entre las personas que veían más de cuatro horas la televisión al día se encontró que el riesgo de defunción durante el periodo del estudio era un 46 por ciento mayor que entre quienes la veían menos de dos horas al día.

El tipo de titulares generados –«La televisión mata, dicen los científicos»– era de esperar. El lector habrá ya observado que lo que se cita es un riesgo relativo, no absoluto. Pero además es un caso en el que el hecho de que dos variables se muevan en tándem (correlación) no significa necesariamente que la variación en una de ellas sea la causa de la variación en la otra (causación). Habría que investigar más a fondo si ver la televisión conlleva realmente algo que aumenta la probabilidad de morir. Mientras tanto existen otras explicaciones, acaso más verosímiles. Por ejemplo, las personas con determinados problemas de salud pasan mucho tiempo sentadas o tumbadas, quizás delante de la televisión, y esos problemas de salud podrían estar asociados a un mayor riesgo de muerte temprana.

Antes de asignar causa y efecto es esencial leer entre líneas. Austin Bradford Hill, en sus pioneros estudios estadísticos, identificó la pregunta crucial: ¿hay alguna otra manera de explicar el conjunto de hechos que tenemos delante, y alguna de esas explicaciones es igual de verosímil o más que la de causa y efecto? La respuesta tiene que ser un «no» rotundo.

Significación estadística

«Más del 80 por ciento de las mujeres afirman que este champú les deja el cabello más sano y brillante». Este tipo de afirmaciones es corriente en la publicidad de toda clase de productos de consumo. Lo que quizás no nos digan es que solo probaron el champú cinco mujeres. Y de las cuatro que certificaron sus milagrosos efectos, una o dos acabaron con un cabello más lustroso por pura casualidad o simplemente lo imaginaron.

Análogas precauciones son necesarias en el caso de los tratamientos médicos. Curar a 6 de 10 pacientes es prometedor; curar a 300 de 500 es la misma tasa de éxito, pero un resultado mucho más convincente. Según David Spiegelhalter, estadístico de la Universidad de Cambridge, el tamaño de la muestra en una prueba es crucial para decidir si la aparente mejoría podría haberse producido por pura casualidad,

El procedimiento estándar para las pruebas clínicas es el establecido por Austin Bradford Hill hace años: los nuevos tratamientos médicos se prueban mediante ensayos clínicos aleatorizados (ECA) en los que sujetos voluntarios son asignados aleatoriamente a un grupo de estudio que recibe el nuevo tratamiento o a un grupo de control al que se le administra un placebo o un tratamiento ya existente. Cuanto más pequeño es el efecto esperado de un medicamento, mayor es el número de personas necesarias para hacer el ensayo. Incluso en esas condiciones, es posible que un tratamiento ineficaz registre el efecto buscado como resultado de la pura casualidad, una de las razones por las que las autoridades responsables de la aprobación por lo general consideran que un solo estudio no es suficiente para dar el visto bueno a un nuevo medicamento.

La próxima vez que oigamos aclamar públicamente una cura milagrosa o un champú maravilloso preguntémonos tres cosas: ¿con cuántas personas se hizo la prueba?, ¿se hizo el ensayo en un ECA? y ¿se confirmó el resultado mediante un segundo ensayo independiente?

Tasas de supervivencia ***versus*** tasas de mortalidad

En su campaña para la candidatura presidencial republicana de 2008, el exalcalde de la ciudad de Nueva York Rudy Giuliani mencionó que la probabilidad de que un varón en Estados Unidos sobreviviese al cáncer de próstata –enfermedad que él tuvo– era del 82 por ciento. Y a renglón seguido comparó esa cifra con la probabilidad de supervivencia del 44 por ciento en el Servicio de Salud Nacional del Reino Unido, financiado por el contribuyente.

Eso, de ser cierto, sería sin duda una sentencia condenatoria de la mortal inadecuación de la medicina socializada, como Giuliani intentaba subrayar. Y las cifras eran correctas. Sin embargo, inducían también a error. Giuliani se refería a tasas de supervivencia quinquenales, el número de personas a las que se les diagnostica la enfermedad y siguen vivas cinco años después. Pero mientras que el cáncer de próstata se diagnostica en Estados Unidos generalmente por métodos de detección sistemática, en el Reino Unido se diagnostica sobre la base de síntomas. La detección precoz suele identificar la enfermedad antes, lo cual representa una fuente de sesgo en la comparación.

Supongamos que de un grupo de hombres con cáncer de próstata todos mueren a la edad de 70 años. Si esas personas no presentan los síntomas hasta los 67 años, la tasa de supervivencia quinquenal basada en síntomas es del 0 por ciento. Supongamos, por otro lado, que los métodos de detección sistemática hallan el cáncer en todos ellos a los 64 años. Aunque el resultado es el mismo –todos mueren a los 70–, la tasa de supervivencia quinquenal es en este caso del 100 por ciento.

Sí, cabría decir, pero un diagnóstico más temprano mediante detección sistemática aumenta las posibilidades de adoptar medidas correctoras. Lo que ocurre, empero, es que la detección sistemática no es segura al cien por cien. En primer lugar, hay falsos positivos en los que la prueba dictamina incorrectamente que una persona sana tiene cáncer. La prevención del cáncer de próstata también detecta cánceres no progresivos que nunca van a desembocar en síntomas y mucho menos en la muerte. El alcance exacto de este sobrediagnóstico es poco claro, pero una estimación aproximada es que el 48 por ciento de los hombres diagnosticados de esta manera no tienen ninguna forma progresiva de cáncer.

El falso diagnóstico y el sobrediagnóstico resultan ambos en tratamiento innecesario y potencialmente en daños significativos: en el caso del cáncer de próstata, impotencia e incontinencia. El sobrediagnóstico infla también la tasa de supervivencia quinquenal al incluir a hombres que de todos modos no habrían muerto de cáncer de próstata.

Una medida comparativa mucho mejor que la tasa de supervivencia es la tasa de mortalidad, la proporción de personas en toda la población que mueren de una determinada enfermedad en un año. Las cifras publicadas por el Instituto Nacional del Cáncer de los Estados Unidos para el periodo 2003-2007 indican una mortalidad para el cáncer de próstata, ajustada por edad, del 23,9 por 100 000. En términos estadísticos es un empate. Una mayor supervivencia no significa necesariamente menos muertes, de manera que cuando veamos citar tasas de supervivencia en apoyo de una tesis vale la pena aplicar cierto escepticismo estadístico.

Entrevista: El hombre que trajo la inteligencia del riesgo

En 2011 Dylan Evans, doctor en filosofía por la London School of Economics, fundó la empresa de inteligencia del riesgo Projection Point. Los humanos no son buenos a la hora de estimar probabilidades, pero, contra todo pronóstico, Evans localizó al puñado de personas que están clasificados como genios en la escala de inteligencia que él llama cociente de riesgo.

La mayoría de la gente probablemente no ha oído hablar de la inteligencia del riesgo. ¿Qué es?

Es la capacidad de estimar probabilidades con precisión. Tiene que ver con poseer el grado adecuado de certeza para hacer conjeturas bien fundadas. Esa es la definición sencilla. Porque esta aptitud aparentemente sencilla resulta ser compleja. Acaba siendo una cosa bastante profunda que tiene que ver con cómo trabajar con información limitada y hacer frente a un mundo incierto, con conocerse a sí mismo y conocer sus propias limitaciones.

¿La mayoría de nosotros somos malos en ese aspecto?

Sí. Los psicólogos Daniel Kahneman y Amos Tversky pusieron los fundamentos de mucho de lo que sabemos sobre formación de juicios y toma de decisiones. Uno de sus resultados es que somos increíblemente malos a la hora de estimar probabilidades. Yo suponía que era algo bastante universal y difícil (si es que no imposible) de remediar, así que me sorprendió encontrar aquí y allá islotes de alta inteligencia del riesgo en sitios inesperados.

¿Dónde estaban esas bolsas de genios?

Las encontré entre los pronosticadores de carreras de caballos, los jugadores de bridge, los meteorólogos y los jugadores expertos. Solo se puede ser un jugador experto allí donde hay margen para la habilidad, para la competencia, como el blackjack, el póker o las apuestas deportivas. Localizar a personas de este modo es difícil porque rehúyen la publicidad, y no fue fácil ganarme su confianza; pero al final acabaron confiando en mí. Fue así como pude entrevistar al equipo de blackjack que inspiró la película *21 blackjack*, así como a otros jugadores de blackjack y póker. Lo que tienen en común es que son muy disciplinados y muy trabajadores. Un rasgo distintivo de la gente que posee este tipo de inteligencia es que tienen mucha experiencia en el aprendizaje de errores derivados del exceso de confianza dentro de un campo determinado, lección que luego aplican a todas las cosas en general.

Conocer tus límites es entonces clave, ¿no?

Sí. Da igual que sepas mucho sobre los caballos de una carrera: si no tienes un conocimiento adecuado de ti mismo, no sirve de nada, no tendrás una alta inteligencia del riesgo.

¿Cómo se cuantifica la inteligencia del riesgo?

Para medir el cociente de riesgo o CR creé una prueba en línea. Consiste en 50 enunciados, algunos verdaderos, otros falsos, y tienes que estimar la probabilidad de que sean verdaderos o falsos. El CR promedio no es alto. Hay dos maneras de tener un CR bajo. Una de ellas es ser demasiado confiado, la otra es serlo demasiado poco. Personas que incurren en este segundo error las hay, pero son muchas menos.

Su libro recoge un resultado bastante preocupante: que los médicos tienen una inteligencia del riesgo muy baja.

Efectivamente. Y es más, a medida que se hacen mayores, se vuelven más confiados, pero no más precisos, lo cual quiere decir que su inteligencia del riesgo disminuye. Uno de los estudios que examiné demostraba que cuando los médicos estimaban que los pacientes tenían una probabilidad del 90 por ciento de tener pulmonía, solo un 15 por ciento aproximadamente la tenían, lo cual es un grado enorme de exceso de confianza. Otra manera de decirlo es que creen saber más de lo que realmente saben. Una de las explicaciones es que los médicos tienen que tomar tantas decisiones diferentes sobre tantas cosas distintas que no tienen ocasión de construir un buen modelo. Es posible que si tienes que tomar decisiones de vida o muerte sientas que has de rezumar confianza, porque de otro modo estarías demasiado aterrado para hacer nada.

¿Qué errores cometemos al estimar el riesgo?

La necesidad de cierre cognitivo es un error realmente interesante. Si tienes una gran necesidad de cierre cognitivo, quiere decir que no te gusta estar en estado de incertidumbre: quieres una respuesta, cualquier respuesta, aunque sea equivocada. En el otro extremo está la necesidad de evitar el cierre, con una búsqueda constante de más información, con lo cual se produce la parálisis por análisis.

¿Podemos mejorar nuestro cociente de riesgo?

Desde luego. Una manera consiste en ser conscientes de diferentes sesgos cognitivos. Otra es jugar a un juego de predicción personal. Apuesta contra ti mismo y estima las probabilidades de algo: de que tu pareja vuelva a casa antes de las seis o de que vaya a llover, y lleva la cuenta de los resultados. Los jugadores expertos están constantemente atentos al exceso de confianza, los sesgos, etc. Es difícil, pero quiere decir que se conocen bastante bien y no son víctimas de ilusiones. Conocen sus puntos flacos.

7. Los mayores problemas de las matemáticas

En mayo de 2000, el Instituto Clay de Matemáticas en Nuevo Hampshire publicó una lista de siete problemas matemáticos especialmente difíciles y estableció un premio de un millón de dólares para la primera solución correcta a cada uno de ellos. Hasta ahora solo se ha otorgado uno de estos Premios del Milenio; los otros seis siguen esperando.

Topología 3D: la conjetura de Poincaré

Cuando el brillante matemático francés Henri Poincaré (1854-1912) no estaba haciendo matemáticas, gustaba de reflexionar acerca de la naturaleza de la creatividad matemática. La lógica, según él, era importante, pero no suficiente: «Demostramos con la lógica, descubrimos con la intuición», escribió.

Los matemáticos tienen a menudo intuiciones o presentimientos a los que dan el nombre de conjeturas o hipótesis, muchas de las cuales son enormemente resistentes a la demostración lógica. La conjetura de Poincaré, publicada en 1904, es una de ellas. Tiene que ver con la topología, el estudio de las formas, espacios y superficies, y en particular de una forma conocida como la 3-esfera. La superficie de una esfera corriente es bidimensional, lo que se conoce como una 2-esfera, y se compone de todos los puntos situados a la misma distancia de otro en el espacio 3D, el centro de la esfera. La superficie de una 3-esfera está compuesta por todos los puntos que están a la misma distancia de un punto en el espacio 4D.

Imaginemos ahora que somos una hormiga que vive en la superficie de una 2-esfera ordinaria. No sabríamos que estábamos viviendo en una esfera. La topología de nuestro mundo podría ser cualquier cosa en tres dimensiones: una esfera, una rosquilla, incluso una rosquilla con un nudo. Pero, al menos en teoría, hay una manera de saber si nuestro mundo es esférico. Trazamos una curva cerrada alrededor de la superficie y la vamos achicando continuamente hacia dentro desde cada punto. Si la curva acaba reducida a un solo punto, es que vivimos en una esfera.

Hasta ahí, para una superficie 2D. El universo en que vivimos tiene tres dimensiones espaciales, y en él parece que podemos encoger cualquier curva cerrada y reducirla a un solo punto. La conjetura de Poincaré dice que, lo mismo que ocurre con la 2-esfera, la 3-esfera es el único espacio 3D en el que toda curva cerrada se puede reducir continuamente a un solo punto. Si el universo fuese finito, la conjetura de Poincaré implicaría que vivimos en la superficie de una esfera en cuatro dimensiones.

Aunque difícil de visualizar, esta conjetura recoge nuestras intuiciones más básicas sobre el espacio 3D. Si no es verdadera, entonces nuestra comprensión intuitiva de espacios y formas es errónea. Poincaré no logró probar su conjetura, como tampoco nadie durante la mayor parte del siglo.

Problema resuelto

Curiosamente, la conjetura fue primero demostrada en cinco o más dimensiones, y luego, en 1982, para una 4-esfera. Pero la versión 3D, representante del universo en que vivimos, siguió mostrándose intratable.

Años después, en noviembre de 2002, Grigori Perelman, del Instituto Steklov de Matemáticas en San Petersburgo, Rusia (véase la figura 7.1), publicó en línea el primero de una serie de trabajos con cálculos que parecían probar la conjetura. Utilizó para ello una técnica potente, conocida como el flujo de Ricci, desarrollada por Richard Hamilton, matemático de la Universidad de Columbia en Nueva York. Esta técnica sirve para suavizar formas abstractas hasta su forma más simple moviendo los puntos en la superficie, pero sin «desgarrarla».

En noviembre de 2003, en una concurrida reunión celebrada en el Instituto Clay de Matemáticas, creador de los Premios del Milenio, Hamilton comunicó que creía que la demostración de Perelman era correcta. La prueba fue sometida al escrutinio de matemáticos en una conferencia celebrada el mes siguiente y, según Bruce Kleiner, de la Universidad de Nueva York, quedó «en esencia confirmada, salvo posiblemente algunos puntos menores». Un equipo de excelentes matemáticos se puso entonces a comprobar los detalles.

Figura 7.1 El matemático ruso Grigori Perelman (aquí en una fotografía de 1993) resolvió finalmente la célebre conjetura de Poincaré en 2002, pero renunció a todos los premios y a toda publicidad.

En 2006 existía ya suficiente confianza como para conceder a Perelman la Medalla Fields por su demostración. Perelman renunció a ella. En julio de 2010 se repitió la historia cuando el Instituto Clay le concedió el millón de dólares por resolver uno de los problemas del Milenio.

La víspera de la ceremonia de entrega en el Instituto Clay, el retraído matemático comunicó a la agencia de noticias rusa Interfax que pensaba que la comunidad matemática organizada era «injusta» y que no le gustaban sus decisiones. Dijo que Richard Hamilton merecía tanto reconocimiento como él por la demostración.

Sin entrar en quién tenía razón, las herramientas desarrolladas por Hamilton y Perelman permitirán a los matemáticos aplicar el flujo de Ricci a otros problemas de topología en dimensiones superiores. La conjetura probada puede tener consecuencias para la relatividad general, donde la materia y la energía deforman el tejido del espacio-tiempo y producen a veces desconcertantes «singularidades» que son imposibles de suavizar.

Flujo de fluidos: el problema de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes se utilizan para describir por ejemplo el comportamiento de un fluido al salir de un grifo o al fluir sobre el ala de un avión, por lo que es enormemente importante resolverlas. Pero su solidez matemática está en entredicho: para determinados problemas es posible que las ecuaciones funcionen mal y generen respuestas incorrectas o que no den siquiera una solución.

Resolver el «problema de la existencia y regularidad de Navier-Stokes» significa determinar de una vez por todas cuál es la situación, y después establecer que las ecuaciones se ajustan bien a la realidad. Muchos matemáticos han intentado encontrar la solución, sin conseguirlo. La demostración más reciente y prometedora la propuso Mukhtarbay Otelbayev, de la Universidad Euroasiática Nacional en Astana, Kazajistán; en 2014 afirmó tener una solución, para luego retractarse.

Algunos físicos cifran ahora sus esperanzas en un nuevo enfoque. El acoplamiento fuerte es un concepto utilizado en física para describir situaciones en las que el sistema consta de muchas partes, lo que hace muy difícil modelar exactamente su comportamiento: los electrones en un superconductor, por ejemplo, o algo tan corriente como el movimiento de las moléculas al hervir el agua en una tetera. Los progresos que se están haciendo en la comprensión de los problemas de acoplamiento fuerte podrían también ayudar a resolver las ecuaciones de Navier-Stokes.

La música de los números primos: la hipótesis de Riemann

Hallándose a punto de hacer una tormentosa travesía de Escandinavia a Inglaterra a principios de la década de 1900, el matemático G. H. Hardy suscribió una insólita póliza de seguro: en una tarjeta postal dirigida a un amigo garrapateó «He demostrado la hipótesis de Riemann». El razonamiento de Hardy es que Dios no le dejaría morir en un naufragio, porque entonces se le honraría por haber resuelto el problema más famoso de las matemáticas. Hardy sobrevivió a la travesía.

Casi un siglo después, la hipótesis de Riemann sigue sin estar resuelta. Su encanto no tiene parangón, porque encierra la clave de los números primos, esos misteriosos números que son el fundamento de tantas partes de las matemáticas (véase el capítulo 4).

Los números primos son los átomos del sistema numérico, pero por desgracia no tienen una tabla periódica como la de los elementos: es prácticamente imposible predecir dónde van a aparecer a lo largo de la recta numérica. En el siglo XIX los matemáticos consiguieron poner un poco de orden en este aparente caos. Lo mismo que al lanzar muchas veces una moneda esperamos obtener aproximadamente igual número de caras que de cruces, los primos se van haciendo cada vez más raros a medida que se avanza por la recta numérica, y ese enrarecimiento es predecible. Por debajo de un número dado x, la proporción de números primos es aproximadamente $1/ln(x)$, donde $ln(x)$ es el logaritmo natural o neperiano de x. Por ejemplo, aproximadamente el 4 por ciento de los números menores de 10 millardos son primos.

Pero ese «aproximadamente» es muy vago. Los números son productos de la pura lógica y por lo tanto deberían comportarse de una manera precisa y regular. Al menos nos gustaría saber cuánto se desvían de esa distribución.

En 1859 Bernhard Riemann, estudiando la así llamada función zeta, halló una pista fundamental. Una función es una manera especial de convertir un número en otro, como por ejemplo la función «multiplicar por 5». Riemann alimentó la función zeta con números complejos, compuestos de una parte real y otra imaginaria (véase el capítulo 5).

Los números complejos se pueden visualizar como situados en un plano 2D, con los números reales en el eje horizontal y los imaginarios en el vertical. Riemann halló que ciertos números complejos, al introducirlos en la función zeta, dan como resultado cero. Los pocos ceros que pudo calcular estaban situados todos ellos sobre una recta vertical en el plano complejo, y así formuló la conjetura de que, exceptuando algunos casos bien estudiados, los infinitos ceros están situados todos ellos exactamente sobre esa recta.

Lo que realmente resultaba extraño es que estos ceros de Riemann parecían reflejar el patrón de desviaciones de la distribución de los números primos respecto de la regla de $1/ln(x)$. Si los ceros están realmente situados sobre la recta crítica, entonces los primos se apartan de esa distribución exactamente tanto como una larga serie de lanzamientos de una moneda se desvía de una distribución 50:50 de caras y cruces.

La conclusión es sorprendente. Sugiere que cada número primo está elegido al azar con una probabilidad de $1/ln(x)$, casi como si estuviese elegido con una moneda trucada. Así que, hasta cierto punto, los primos están domesticados. Aunque no sabemos exactamente cuándo va a aparecer uno de ellos, podemos hacer predicciones estadísticas, igual que las podemos hacer sobre el lanzamiento de una moneda.

Ahora bien, eso solo podemos hacerlo si la conjetura de Riemann es verdadera. Si los ceros no están sobre la recta, entonces los números primos son mucho más díscolos. Y no solo eso: teniendo en cuenta que cientos de resultados de la teoría de números comienzan por «Si la hipótesis de Riemann es cierta, entonces…», de no ser verdadera la conjetura habría que revisar todos esos resultados.

El problema es cómo probar algo sobre un número infinito de números. Los investigadores han utilizado superordenadores para calcular los primeros miles de millones de ceros de Riemann por encima del eje x, y millones de otros ceros más arriba, y hasta ahora todos están sobre la recta crítica. Con que solo uno de ellos no lo estuviera, quedaría refutada la hipótesis de Riemann. Pero solo a golpe de ordenador no se puede demostrar la hipótesis: siempre quedarán más ceros por comprobar. Y en la teoría de números ha habido ya casos de conjeturas plausibles, apoyadas por pruebas numéricas aparentemente abrumadoras, que luego resultaron ser falsas.

Conexión cuántica

A principios del siglo XX los matemáticos hicieron otra atrevida conjetura: que los ceros de Riemann podrían corresponderse con los niveles de energía de un sistema mecánico cuántico. La mecánica cuántica trata del comportamiento de partículas pequeñas como los electrones. Una cosa fundamental es que aunque las ecuaciones operan con números complejos, la energía de un sistema físico siempre es un número real, de modo que los niveles de energía forman un conjunto infinito de números situados a lo largo del eje real del plano complejo, una línea recta como la de los ceros de Riemann.

Esta recta es horizontal, no vertical, pero bastan unas matemáticas muy sencillas para rotar la recta de ceros de Riemann y hacerla coincidir con la recta real. Si los ceros coinciden con los niveles de energía de algún sistema cuántico, la hipótesis de Riemann quedaría demostrada. Se han hecho ya varios intentos de hacer justo eso con una serie de sistemas cuánticos, pero hasta ahora sin éxito.

Si se lograra probar la hipótesis de Riemann, entonces, utilizando las matemáticas de la función zeta, podríamos predecir el resultado de muchos experimentos cuánticos, como la dispersión de niveles de muy alta energía en átomos, moléculas y núcleos. Resulta también que las mismas matemáticas son aplicables a cualquier situación en la que haya ondas (por ejemplo, de luz o de sonido) que rebotan de acá para allá caóticamente, con lo cual se podría mejorar el rendimiento de las cavidades de microondas y de los cables de fibra óptica e incluso la acústica de las salas de concierto, que de ese modo podría beneficiarse de la música de los números primos.

Complejidad computacional: ¿P = NP?

«Queridos investigadores: me complace anunciarles una demostración de que P no es igual a NP; la adjunto en tipos de 10 pt y 12 pt». Así empezaba un correo electrónico enviado en agosto de 2010 a un grupo de destacados informáticos por Vinay Deolalikar, matemático de Hewlett-Packard Labs en Palo Alto, California.

El anuncio era incendiario. Deolalikar estaba diciendo que había resuelto el mayor problema de la informática, una cuestión relativa a los límites fundamentales de la computación. Cuando se habla de los límites de la computación se suele hacer referencia a cuántos transistores –los elementos constitutivos de los microprocesadores– podemos embutir en un chip de silicio (o del material o tecnología que pueda reemplazarlo). El problema de si P es igual a NP suscita el espectro de una limitación más fundamental, inherente a la propia mecánica de la computación.

Aunque la demostración de Deolalikar parecía inicialmente prometedora, un ejército de investigadores trabajando en una colaboración informal en línea detectó enseguida defectos fundamentales. Stephen Cook, de la Universidad de Toronto, Canadá, el informático que formuló por primera vez el problema de si P = NP en mayo de 1971, dice: «Ha resultado ser un problema increíblemente difícil». Hoy lo sigue pareciendo.

Para entender en qué consiste el problema y por qué es tan importante es necesario desglosarlo en sus distintas partes.

¿Qué es P?

P y NP son ejemplos de «clases de complejidad», categorías en las que se pueden clasificar los problemas en función de la dificultad de resolverlos con ayuda de un ordenador. Los problemas P son los fáciles: aquellos para los que existe un algoritmo que permite resolverlos en un tiempo «razonable». Un ejemplo sería buscar un número en una lista: se van comprobando uno a uno los números hasta encontrar el que se busca. Si la lista tiene n números –el «tamaño» del problema–, el algoritmo necesita como máximo n pasos para encontrarlo, de modo que la complejidad es proporcional a n, algo que se considera razonable.

Lo mismo ocurre con la multiplicación a mano de dos números de n dígitos, que necesita aproximadamente n^2 pasos. Cualquier problema de tamaño n cuya solución requiera n^x (n elevado a algo) pasos se puede resolver de manera relativamente rápida. Se dice que es resoluble en «tiempo polinómico» y se denota por P.

¿Qué es NP?

En algunos casos, a medida que aumenta el tamaño del problema, el tiempo de computación aumenta, no polinómicamente, como n^x, sino exponencialmente, como x^n. Este aumento es mucho más rápido. Imaginemos, por ejemplo, un algoritmo para alistar todas las maneras posibles de ordenar los números de 1 a n. Visualizar las soluciones no es difícil, pero el tiempo necesario para hacer rápidamente una lista se dispara a medida que aumenta n. Y puede ser difícil demostrar que un problema pertenece a esta clase no polinómica, porque hay que demostrar que no existe absolutamente ningún algoritmo de tiempo polinómico para resolverlo.

En el caso de algunos problemas difíciles de resolver en un tiempo razonable es posible que con un poco de inspiración se pueda llegar a una solución fácil de verificar. Por ejemplo, encontrar la solución de un sudoku puede ser endiabladamente difícil, incluso para un ordenador, pero con un sudoku resuelto es fácil comprobar si cumple los criterios de una solución válida (véase la figura 7.2). Los problemas cuya solución es difícil de encontrar pero que se pueden comprobar en un tiempo polinómico constituyen la clase de complejidad NP, que significa «polinómico en sentido no determinista».

Y aquí está el meollo del problema de P = NP. Todos los problemas del conjunto P pertenecen también al conjunto NP, porque si es fácil encontrar la solución, también es fácil comprobarla. Pero la inversa ¿es cierta? Si es fácil verificar la solución de un problema, ¿es también fácil resolverlo? Es decir, todo problema del conjunto NP ¿está también en P?

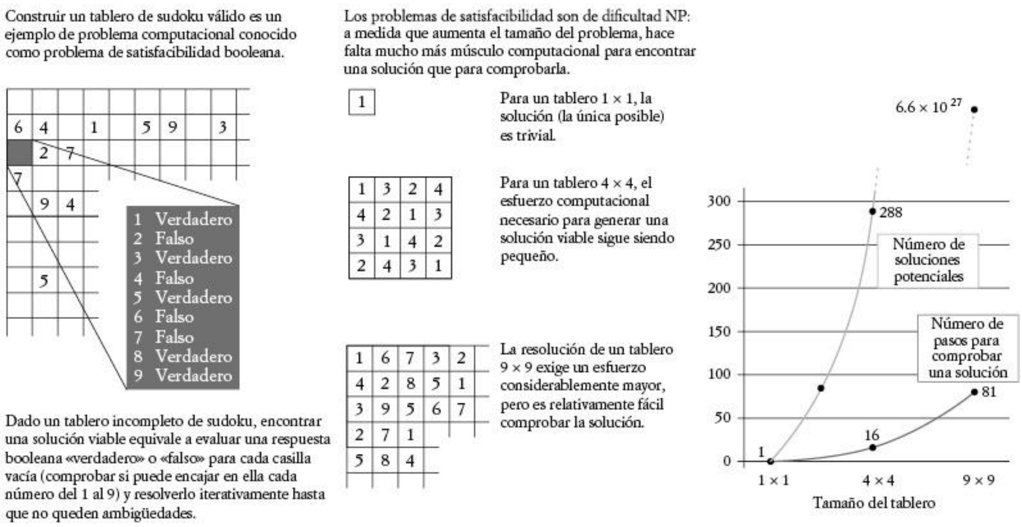


Figura 7.2 Construir un tablero válido de sudoku es un ejemplo de problema computacionalmente «difícil», conocido como problema de satisfacibilidad.

¿Qué ocurre si P ≠ NP?

En 2002 William Gasarch, científico informático de la Universidad de Maryland preguntó a cien colegas suyos cuál creían que era la respuesta a la pregunta de si P es igual a NP. La ganadora, con gran diferencia, fue P ≠ NP, con 61 votos. Solo seis personas votaron por P = NP; algunas de ellas dijeron que era solo para llevar la contraria. El resto, o no tenía ninguna opinión o pensaba que el problema era imposible de resolver.

Si resulta que la mayoría tiene razón, entonces hay problemas de suyo tan complicados que nunca podremos resolverlos. La mayoría de los informáticos dan ya por supuesto que es así y se concentran en diseñar algoritmos para hallar soluciones aproximadas que basten para la mayoría de las aplicaciones prácticas (véase el capítulo 8). La demostración de que P ≠ NP confirmaría que eso es lo más a lo que se puede aspirar. Asimismo, podría arrojar luz sobre las prestaciones del hardware informático más reciente, que reparte los cálculos entre múltiples procesadores en paralelo. Con doble número de procesadores, las cosas deberían ir dos veces más rápido, pero con ciertos tipos de problemas no ocurre así. Esto implica algún tipo de limitación en la computación.

Si P = NP, estaríamos ante una revolución, debido a la existencia, demostrada por Cook en su seminal artículo de 1971, de un subconjunto de los problemas NP llamados NP-completos, que son la llave maestra de los servicios NP: si se encuentra un algoritmo para resolver un problema NP-completo, ese algoritmo se puede utilizar para resolver cualquier problema NP en tiempo polinómico.

Hay muchos problemas del mundo real que se sabe que son NP-completos. Los problemas de satisfacibilidad como el sudoku son un ejemplo, lo mismo que el célebre problema del viajante, que consiste en hallar la ruta más corta para visitar una serie de puntos y volver al punto de partida, cuestión de sumo interés en logística y en otros campos (véase la figura 7.3).

Si se lograra encontrar un algoritmo de tiempo polinómico para cualquier problema NP-completo, eso demostraría que P = NP, porque entonces todos los problemas NP serían fácilmente resolubles. La existencia de semejante solución computable universal haría posible la perfecta programación del transporte, una distribución más eficiente de las mercancías y la producción con un mínimo de residuos. Podría también llevar a algoritmos que realizaran un reconocimiento casi perfecto de la voz y una traducción lingüística casi perfecta, además de hacer posible que los ordenadores procesaran la información visual igual de bien que los humanos.

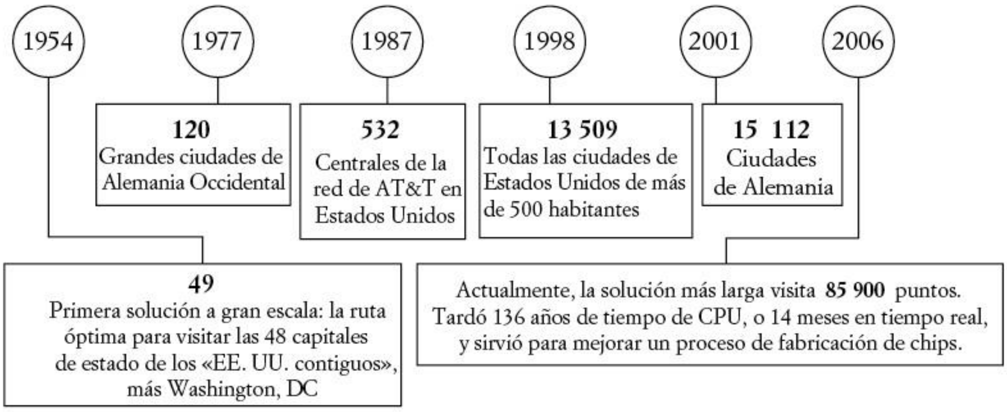


Figura 7.3 Resolver el problema del viajante (encontrar la ruta más corta entre múltiples puntos) es un problema computacionalmente difícil. A medida que han

ido mejorando los ordenadores ha aumentado el tamaño de los problemas resueltos con éxito.

Por otro lado, es posible que ocasionara también la ruptura del comercio en línea. Los métodos de encriptación utilizados para proteger los datos personales y bancarios al hacer una transacción se basan en el supuesto de que descomponer un número en sus factores primos es difícil (véase el capítulo 4). El problema es ciertamente un problema NP clásico: encontrar los factores primos de 304 679 es difícil, pero comprobar que son 547 y 557 es muy fácil; basta con multiplicarlos.

Otro curioso efecto secundario es que, a medida que las matemáticas se hiciesen en gran parte mecanizables, los matemáticos se harían superfluos. Teniendo en cuenta que encontrar una demostración matemática es difícil, mientras que comprobarla es relativamente fácil, las propias matemáticas son en cierto modo un problema NP. Si P = NP, podríamos dejar que fuesen los ordenadores los que produjeran nuevas demostraciones.

¿Y si no hay un algoritmo?

Las visiones de un mundo P = NP tienen una extraña arruga: podría ocurrir que después de probar que un enunciado es verdadero, no se pudiese sacar partido de la demostración. Los matemáticos encuentran a veces demostraciones «no constructivas» en las que se prueba que un determinado objeto existe, sin realmente encontrarlo. Así, podría demostrarse que existe un algoritmo P, desconocido, para resolver un problema considerado NP.

Un limbo igual de torturante sería demostrar que P = NP con un algoritmo universal cuya complejidad aumentara como n elevado a un número muy grande. Siendo polinómico, podría optar al premio de un millón de dólares del Instituto Clay, pero en términos de computabilidad no serviría para nada.

Teoría de partículas: el salto de masa de Yang-Mills

La teoría de Yang-Mills proporciona una base matemática para la actual comprensión de la física de partículas elementales. Sin ella seríamos incapaces de decir cuántas partículas hay o qué masas deben tener. Pero hay un problema. Experimentos como los del Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el CERN cerca de Ginebra (Suiza), así como simulaciones con ordenador, sugieren que existe una masa mínima para las partículas; es decir, no podemos conjurar una nueva partícula con una masa arbitrariamente pequeña. Pero la distancia entre esa masa mínima y cero –lo que se denomina el «salto de masa»– no parece estar contenida en el marco de la teoría de Yang-Mills. Resolver el problema supone justificar matemáticamente la existencia de ese salto, y hasta ahora no se ha avanzado mucho en ese aspecto.

Curvas elípticas: la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer

Las ecuaciones conocidas como curvas elípticas describen formas onduladas cuando se dibujan en una gráfica y son de la forma $y^2 = x^3 + ax + b$, donde x e y son variables y a y b son constantes fijas. Se utilizan en criptografía y fueron esenciales en la reciente resolución de otro viejo problema, el último teorema de Fermat (véase más adelante). Los matemáticos que trabajan con estas curvas utilizan otra ecuación llamada la L-serie para estudiar su comportamiento. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer dice que si una curva elíptica tiene un número infinito de soluciones, su L-serie debe ser igual a 0 en algunos puntos. Demostrar que es cierto permitiría a los matemáticos profundizar aún más en estas clases de ecuaciones, aunque las aplicaciones prácticas no son inmediatamente obvias.

El último teorema de Fermat

El último teorema de Fermat habría figurado sin duda en la lista de los problemas del Milenio, de los mayores problemas no resueltos en matemáticas, de no haber sido porque se halló una demostración justo unos años antes de publicarse la lista.

El teorema era un problema aparentemente simple planteado por Pierre de Fermat, un matemático del siglo XVII, que afirmó que para cualesquiera tres números enteros a, b y c, la ecuación $a^n + b^n = c^n$ no puede ser satisfecha por ningún entero n mayor que 2. Sabemos que para $n = 2$ la ecuación la cumplen las denominadas ternas pitagóricas. Por ejemplo, la ecuación se cumple para a, b y c igual a 3, 4 y 5, y podemos construir un triángulo rectángulo con lados de esas longitudes.

El teorema de Fermat equivale a decir que en más de dos dimensiones no existen formas geométricas que satisfagan una condición parecida. De forma intrigante, Fermat afirmó que tenía una demostración del teorema, pero que no le cabía en el estrecho margen del libro de texto que estaba leyendo.

Su comentario de pasada lanzó a los matemáticos a una búsqueda secular que terminó en 1993, cuando el matemático británico Andrew Wiles (véase la figura 7.4), después de trabajar en secreto siete años en el problema, publicó una larga demostración que probaba que Fermat estaba en lo cierto. Con ello abrió además magníficas perspectivas en la teoría de números y desarrolló nuevas herramientas para abordar otros problemas matemáticos que Fermat nunca pudo conocer.

La primera demostración resultó tener algunos errores. Con ayuda de algunos colegas, Wiles consiguió anunciar una nueva versión completa en 1994, publicada oficialmente en la revista *Annals of Mathematics* en 1995.

Cuando la demostración saltó por primera vez a los titulares, Wiles se convirtió en una celebridad, pero a regañadientes. Poco a poco fue aceptando sin embargo ese papel, para acabar declarando: «En los años transcurridos desde entonces muchas personas me han dicho que se dedicaron a las matemáticas gracias a la publicidad que ha rodeado a todo esto y a la idea de poder dedicar su vida a problemas tan interesantes; eso me hizo ver lo valioso que es en realidad».

En 2016 la Academia Noruega de las Ciencias y las Letras le concedió el Premio Abel, llamado a menudo el Premio Nobel de matemáticas, «por su asombrosa demostración del último teorema de Fermat mediante la conjetura de modularidad para curvas elípticas semiestables, abriendo una nueva era en la teoría de números».

Figura 7.4 En 1993 Andrew Wiles se convirtió en el matemático más famoso del mundo, al publicar una demostración del célebre último teorema de Fermat.

Dimensiones superiores: la conjetura de Hodge

Los matemáticos comprueban a menudo que un problema planteado en un determinado campo, como el álgebra por ejemplo, es posible convertirlo en otro planteado en un campo distinto, como la geometría, para facilitar así su resolución. Eso es lo que hacemos cuando dibujamos la gráfica de una ecuación en una hoja de papel. Estas gráficas son bidimensionales, lo que significa que las correspondientes ecuaciones solo pueden tener dos variables. ¿Cómo utilizamos entonces este truco con ecuaciones de tres, cuatro o incluso más variables? La respuesta está en el campo de la geometría algebraica, que generaliza esta idea de la traducción a dimensiones superiores.

Los especialistas en geometría algebraica trabajan con técnicas y conceptos mucho más complejos que simples ecuaciones y gráficas, y han ido encontrando poco a poco la manera de traducir unos problemas en otros. La conjetura de Hodge, el último de los siete problemas del Milenio, describe cómo poder hacerlo para un tipo particular de objeto matemático llamado ciclo de Hodge; pero hasta que alguien demuestre que es verdadera y gane el premio, nunca sabremos con seguridad si es posible.

La importancia de la demostración

La demostración marca la diferencia entre las matemáticas y las demás ciencias. Las matemáticas no son una disciplina evolutiva en la que la llegada de nuevos hechos modifica las interpretaciones y al final solo sobrevive la teoría más apta. Es más bien como una enorme pirámide en la que cada generación construye sobre los sólidos fundamentos del pasado.

Si preguntamos a un matemático qué constituye una demostración probablemente nos diga que tiene que ser absoluta, una secuencia exhaustiva de pasos lógicos que lleven desde un punto de partida establecido a una conclusión innegable. Pero no se puede afirmar algo que uno cree que es verdadero y tirar sin más para adelante: hay que convencer a los demás de que no has cometido ningún error. En otras palabras, las demostraciones tienen que ser verificadas.

Verificar hoy una demostración realmente innovadora puede ser una experiencia frustrante. En 2012, por ejemplo, el eminente matemático Shinichi Mochizuki, de la Universidad de Kyoto, en Japón, publicó en su sitio web más de 500 páginas de densas matemáticas. El trabajo, culminación de años de esfuerzos, probaba un antiguo rompecabezas sobre la naturaleza de los números conocido como la conjetura ABC… o pensamos que lo probaba, porque aunque muchos matemáticos acogieron en su momento el resultado con júbilo, nadie ha sido hasta ahora capaz de verificarlo.

Los matemáticos han tenido que aceptar recientemente la posibilidad de un nuevo tipo de errores: los errores de programación informática. Pensemos en el problema de los cuatro colores, la idea de que es posible colorear cualquier mapa con solo cuatro colores sin que ninguna frontera (distinta de un punto) tenga el mismo color a ambos lados. Podemos hacer todas las pruebas que queramos y veremos que siempre es verdad; pero para probarlo es necesario excluir la posibilidad de que exista un extraño mapa que constituya la excepción. En 1976 Kenneth Appel y Wolfgang Haken hicieron aparentemente eso. Demostraron que es posible reducir el problema a 1936 configuraciones que quizás podrían requerir cinco colores. Después utilizaron un ordenador para comprobar cada uno de estos posibles contraejemplos y hallaron que todos ellos podían colorearse efectivamente con cuatro colores: el primer gran teorema en ser demostrado con ayuda de un ordenador.

Solo que no fue demostrado del todo. En 2005 Georges Gonthier, de Microsoft Research en Cambridge, Reino Unido, junto con su equipo de colaboradores, actualizó la demostración del teorema de los cuatro colores, haciendo que todas sus partes fuesen legibles por un ordenador, y descubrió que una parte de la demostración, que generalmente se suponía que era verdadera porque parecía obvia, nunca había sido demostrada porque no parecía que mereciese la pena. Afortunadamente resultó ser correcta, pero ello pone de manifiesto la naturaleza no tan absoluta de algunas complejas demostraciones modernas.

Por otro lado, los ordenadores y la fuerza bruta solo son de ayuda hasta cierto punto. Pensemos en uno de los grandes problemas sobre los números primos: el de si es posible generar una secuencia de números primos de la longitud que queramos de manera que la diferencia entre cada dos consecutivos sea siempre la misma.

Por ejemplo, 3, 5, 7 es una progresión aritmética de números primos de longitud tres. Para una progresión de longitud cuatro podríamos elegir 5, 11, 17, 23, cuatro primos con una diferencia de 6. Si empezamos en el primo 56 211 383 760 397 y le sumamos 44 546 738 095 860 obtenemos otro primo. Volvemos a sumar 44 546 738 095 860 y obtenemos un tercer primo. Si seguimos haciendo lo mismo obtenemos 23 primos en progresión aritmética, descubierta en 2004 (con un ordenador) por Markus Frind, Paul Jobling y Paul Underwood.

Pero nada de esto constituye una demostración de que es posible obtener una secuencia de cualquier longitud que queramos; y como hay infinitos números primos, sería imposible hacerlo a base de fuerza bruta. Así que la aplicación del razonamiento lógico por parte de los matemáticos sigue teniendo su lugar. En 2004, Terence Tao, de la Universidad de California, Los Ángeles, en colaboración con Ben Green, de la Universidad de Bristol, zanjó maravillosamente la cuestión al demostrar que es teóricamente posible encontrar, en alguna parte del universo de los números, una secuencia adecuada de cualquier longitud que queramos: un descubrimiento que le valió a Tao la Medalla Fields en 2006.

En comparación con muchas demostraciones, la de Tao y Green está lejos de ser difícil, tanto por su longitud como por su complejidad, pero aun así necesitaron unas 50 páginas y se basaron en las demostraciones de muchos otros autores. Lo único frustrante es que es una demostración no constructiva: te dice que las secuencias existen, pero no cómo encontrarlas.

El problema del apilamiento de esferas de Kepler

El problema fundamental lo conocen bien los fruteros: ¿cuál es la mejor manera de apilar una colección de objetos esféricos, digamos que una partida de naranjas expuestas a la venta? Este es un ejemplo de los esfuerzos que tienen que desplegar en ocasiones los matemáticos, incluso con un problema aparentemente sencillo, para encontrar la solución.

El astrónomo y matemático Johannes Kepler puso la pelota en juego en 1611 al sugerir que la configuración más eficiente era en pirámide. Pero no logró demostrar su conjetura. Las cosas quedaron así hasta 1998, cuando Thomas Hales, de la Universidad de Pittsburgh, Pensilvania, presentó una demostración que probaba que la intuición de Kepler era correcta. Aunque hay infinitas maneras de apilar infinitas esferas, la mayoría de ellas son variaciones de unos cuantos miles de temas. Hales desglosó el problema en los miles de posibles configuraciones de esferas que matemáticamente representan las infinitas posibilidades y utilizó luego programas informáticos para comprobar todas ellas.

Pero ahí no acabó la historia. La demostración de Hales tenía 300 páginas y requirió la participación de doce revisores durante cuatro años para verificarla. Incluso en el momento de su publicación, en la revista *Annals of Mathematics* en 2005, los revisores solo pudieron afirmar que estaban «seguros al 99 por ciento» de que era correcta.

En 2003 Hales puso en marcha el proyecto Flyspeck, encaminado a validar automáticamente su demostración mediante un proceso conocido como verificación formal. Su equipo utilizó dos programas auxiliares llamados Isabelle y HOL Light, ambos construidos sobre un pequeño núcleo de lógica escudriñado a fondo para excluir errores. Con ello se disponía de una base que garantizaba que el ordenador era capaz de comprobar cualquier serie de enunciados lógicos para confirmar su verdad. Esta tecnología excluye efectivamente a los árbitros matemáticos del proceso de verificación. Como resultado de ello, Hales sostiene que la opinión de estos sobre la corrección de la demostración ya no importa.

En 2014 el equipo de Flyspeck anunció que había terminado de traducir las densas matemáticas de la demostración de Hales a una forma computarizada y que había comprobado que efectivamente era correcta. Hales dijo a la sazón que sentía que se había quitado un gran peso de encima. El resto del mundo matemático tardó un poco más en mostrarse convencido, pero en 2017 la demostración formal fue finalmente aceptada en la revista *Forum of Mathematics.*

8. Matemáticas cotidianas

Las matemáticas no solo van de ideas de altos vuelos. Se pueden aplicar a toda clase de situaciones inesperadas de la vida cotidiana para resolver problemas tanto enormemente útiles como enormemente frívolos.

El algoritmo que dirige el mundo

Si el lector se ha preguntado alguna vez cómo suministra un supermercado los alimentos que consume o cómo está programado el tren o el autobús que le lleva al trabajo, la respuesta puede que esté escondida en alguna sala de servidores situada en algún rincón, con un algoritmo que en este mismo momento está trabajando en aspectos de nuestra vida de mañana, de la semana que viene o de dentro de un año. Se le conoce por el nombre de algoritmo simplex y se utiliza en incontables situaciones en las que se necesita analizar un problema en múltiples dimensiones.

Para un matemático, las dimensiones no son únicamente espaciales. El concepto de dimensión nació sin duda del hecho de que tenemos tres coordenadas de posición que pueden variar independientemente: arriba-abajo, izquierda-derecha y delante-detrás. Si añadimos el tiempo, tenemos una cuarta dimensión que funciona de manera muy parecida, salvo que, por razones desconocidas, solo podemos movernos en ella en un único sentido.

Pero, aparte del movimiento, encontramos a menudo en el mundo real situaciones en las que podemos variar de manera independiente no solo cuatro cosas, sino muchas más. Supongamos, por ejemplo, que estamos haciendo un bocadillo para el almuerzo. En el frigo hay diez ingredientes que podemos utilizar en cantidades variables: queso, chutney, atún, tomates, huevos, mantequilla, mostaza, mayonesa, lechuga y humus. Estos ingredientes son las dimensiones del problema de hacer un bocadillo, un problema que se puede tratar geométricamente. Eligiendo una combinación concreta de ingredientes, el almuerzo final quedará representado por un solo punto en un espacio 10-dimensional.

En este espacio multidimensional es poco probable que tengamos libertad absoluta de movimientos. Puede que en el refrigerador solo queden dos lonchas mohosas de queso, o restos de mayonesa en el fondo del frasco. Además, nuestras preferencias personales quizás añadan otras restricciones más sutiles al problema: puede que una limitación de la cantidad de calorías, o el deseo de no mezclar atún con humus. Cada una de estas restricciones representa un límite infranqueable en nuestro espacio multidimensional.

En el mundo de la empresa, de la administración y de la ciencia surgen problemas de optimización parecidos que se convierten enseguida en monstruos con muchos miles o incluso millones de variables y restricciones. Un importador de fruta puede que se enfrente con un problema 1000-dimensional para gestionar por ejemplo el transporte de plátanos desde cinco centros de distribución, con cantidades variables de fruta almacenada, a 200 tiendas que necesitan cada una de ellas cantidades diferentes. ¿Cuántas piezas de fruta hay que enviar, desde qué centros y a qué tiendas, minimizando al mismo tiempo los costes totales de transporte?

Análogamente, el gerente de un fondo de inversión quiere estructurar de manera óptima su cartera para equilibrar el riesgo y el rendimiento esperado con una serie de acciones; el encargado de los horarios de una compañía de ferrocarriles debe establecer la programación óptima del personal y de los trenes; o el gerente de una fábrica o de un hospital tiene que determinar el aprovechamiento óptimo de los recursos finitos de máquinas y espacios de salas. Cada uno de estos problemas se puede representar como una forma geométrica, un «politopo», en el que el número de dimensiones es igual al número de variables del problema, y en el que los límites están constituidos por las restricciones existentes.

El algoritmo simplex proporciona un método para moverse por el politopo y avanzar hasta el punto óptimo. Nació a finales de los años cuarenta del trabajo del matemático estadounidense George Dantzig, que durante la Segunda Guerra

Mundial había investigado la manera de aumentar la eficiencia logística de las fuerzas aéreas de su país.

Una de las primeras conclusiones a las que llegó fue que el valor óptimo de la «función objetivo» (lo que se quiere maximizar o minimizar: el beneficio, el tiempo de viaje o lo que sea) está siempre situado en uno de los vértices del politopo (véase la figura 8.1). Esto facilita inmediatamente las cosas: el número de puntos dentro de un politopo es infinito, pero el número de vértices siempre es finito.

La mala noticia, sin embargo, es que el número de vértices, aunque finito, puede ser astronómico. Incluso un problema de 10 dimensiones con 50 restricciones (como el de asignar un programa de trabajo a diez personas con diferentes niveles de experiencia y distintas restricciones de tiempo) puede ya hacer necesario explorar varios miles de millones de vértices. En lugar de ensayar uno por uno, el algoritmo simplex ofrece un camino más rápido. Lo que hace es aplicar una «regla del pivote» en cada vértice. Esta regla varía ligeramente según las distintas implementaciones del algoritmo, pero en muchos casos consiste en elegir la arista a lo largo de la cual la función objetivo disminuye más deprisa, garantizando así que cada paso nos acerca más al valor óptimo. Cuando se encuentra un vértice desde el cual ya no es posible descender más, sabemos que hemos llegado al punto óptimo.

Generalmente el método simplex resuelve el problema de una manera muy limpia y alcanza casi siempre el óptimo al cabo de un número de pivotes que es comparable al número de dimensiones del problema, es decir, probablemente con un máximo de unos cuantos centenares de pasos para resolver un problema de 50 dimensiones, en lugar de los miles de millones que serían necesarios con un planteamiento de fuerza bruta. El tiempo de ejecución en ese caso se dice que es «polinómico» o simplemente «P», la referencia para algoritmos prácticos que tienen que correr en procesadores finitos en el mundo real (véase el capítulo 7).

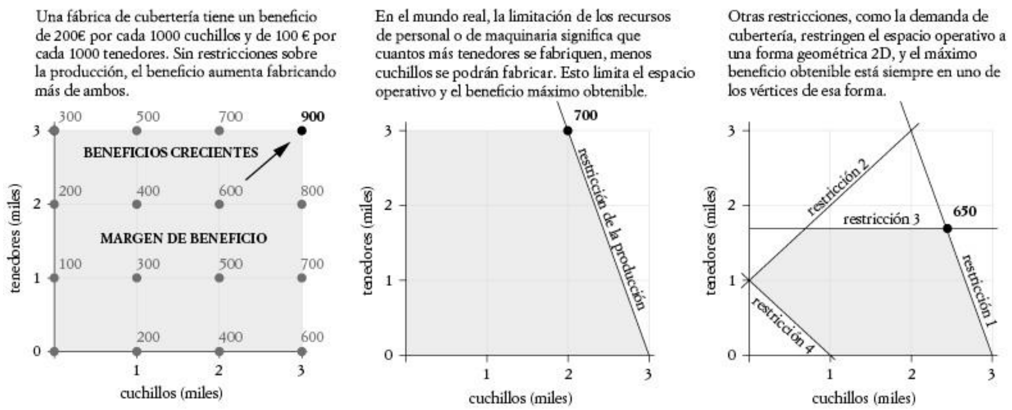


Figura 8.1 Muchos problemas de «optimización con restricciones» se pueden reducir a problemas de geometría, como en este sencillo ejemplo 2D.

El algoritmo de Dantzig vio su primera aplicación comercial en 1952, consistente en encontrar la mejor manera de mezclar las existencias disponibles de cuatro productos petroleros diferentes para obtener un combustible de aviación con un octanaje óptimo. Desde entonces, el algoritmo simplex no ha cesado de conquistar el mundo, integrado en paquetes de optimización comerciales o en productos de software a la medida. Hoy día se hacen probablemente decenas o centenas de miles de llamadas por minuto al método simplex.

Para los matemáticos, sin embargo, sigue sin ser una solución perfecta. Para empezar, el tiempo de ejecución del algoritmo solo es polinómico por término medio. Por lo general funciona muy bien, pero parece como si siempre fuese posible pergeñar intrincados problemas de optimización en los que funciona mal. La buena noticia es que estos casos patológicos no suelen aparecer en aplicaciones prácticas, aunque sigue sin estar claro exactamente por qué.

En los años setenta y ochenta apareció en escena un pretendiente, con el descubrimiento de los «métodos de punto interior», algoritmos impresionantes que, en lugar de ir tanteando el camino alrededor de la superficie del politopo, lo perforan a través del núcleo. Llegaron con un auténtico sello matemático de aprobación –la garantía de ejecutarse siempre en tiempo polinómico– y generalmente necesitaban menos pasos que el método simplex para alcanzar el punto óptimo: rara vez más de 100 movimientos, independientemente del número de dimensiones del problema.

Lo malo de los métodos de punto interior es que cada paso entraña más computación que un pivote del método simplex: en lugar de comparar una función objetivo a lo largo de un reducido número de aristas, hay que analizar todas las posibles direcciones en el interior del politopo, lo cual es una empresa gigantesca. En algunos problemas industriales de gran tamaño, esta solución vale la pena, pero no ocurre lo mismo en todos los casos. Jacek Gondzio, un especialista en optimización de la Universidad de Edimburgo, Reino Unido, estima que entre el 80 y el 90 por ciento de los problemas de optimización lineal se siguen resolviendo hoy con alguna variante del algoritmo simplex, lo mismo que bastantes de los problemas no lineales, que son menos comunes pero aún más complejos. Gondzio reconoce ser un devoto investigador del método de punto interior. «Hago todo lo posible para intentar competir», dice.

Con todo, sería deseable encontrar algo mejor: alguna nueva variante del algoritmo simplex que conserve todas sus ventajas y que se ejecute invariablemente en tiempo polinómico. Ahora bien, incluso la existencia de semejante algoritmo depende de un supuesto geométrico fundamental: que exista realmente un camino suficientemente corto entre dos vértices alrededor de la superficie de un politopo. Esta conjetura fue formulada por primera vez en 1957 por Warren Hirsch, matemático estadounidense y pionero de la investigación operativa, en una carta a Dantzig en la que reflexionaba sobre la eficiencia del algoritmo simplex.

2000 años de algoritmos

El algoritmo simplex de George Dantzig pasa por ser el más importante del mundo. Pero los algoritmos se remontan a mucho antes.

*c.*300 a. C. El algoritmo de Euclides

Este algoritmo, recogido en los *Elementos,* el tratado de matemáticas de Euclides, es el primer algoritmo de la historia. Dados dos números, muestra cómo encontrar el número más grande que es divisor de ambos. Aún no ha sido mejorado.

1946 El método de Monte Carlo

Cuando el problema es demasiado difícil para resolverlo directamente, entramos en el casino del azar. El algoritmo de Monte Carlo de John von Neumann, Stanislaw Ulam y Nicholas Metropolis nos enseñó a jugar… y ganar.

1957 El compilador Fortran

Programar era un trabajo enrevesado y laborioso hasta que un equipo de IBM dirigido por John Backus inventó Fortran, el primer lenguaje de programación de alto nivel. En el centro está el compilador: el algoritmo que convierte las instrucciones del programador en código máquina.

1994 El algoritmo de Shor

Peter Shor, de los Laboratorios Bell, halló un nuevo algoritmo rápido para descomponer un número entero en sus factores primos, pero el algoritmo solo se podría ejecutar en un ordenador cuántico. Si se llegara a implementar en gran escala, reventaría prácticamente toda la seguridad en internet.

1998 Pagerank

El vasto almacén de información de internet sería de escasa utilidad sin algún sistema de búsqueda. Sergey Brin y Larry Page, de la Universidad Stanford, encontraron una manera de asignar un índice de relevancia a cada página web; y desde entonces los fundadores de Google han vivido de ello.

En 1966 se demostró que la conjetura de Hirsch era verdadera para todos los poliedros 3D, pero desde el principio existió el presentimiento de que no se cumplía para politopos de dimensiones superiores. En 2010 el matemático español Francisco Santos Leal, de la Universidad de Cantabria, España, demostró que la conjetura era efectivamente falsa, aunque únicamente para el caso de un politopo de 43 dimensiones con 86 caras. Según la conjetura de Hirsch, el camino más largo a través de esta forma tendría (86-43) pasos, es decir, 43. Santos estableció de manera concluyente que contiene un par de vértices que están separados por al menos 44 pasos.

Desde la primera refutación de Santos se han encontrado otros politopos que no cumplen la conjetura de Hirsch en dimensiones tan pequeñas como 20. El único límite conocido para la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de un politopo es mucho mayor de lo que habría predicho la conjetura de Hirsch; de hecho, demasiado grande para garantizar un tiempo de ejecución razonable por el método simplex, por fantástica que sea alguna nueva regla de pivote que quepa imaginar. Si eso es lo máximo que se puede conseguir, el objetivo de un algoritmo ideal quedará para siempre fuera de nuestro alcance, con consecuencias posiblemente graves para el futuro de la optimización.

Puede que una variante altamente eficiente del algoritmo simplex siga siendo posible si es verdadera la así llamada conjetura polinómica de Hirsch. Esta conjetura es más débil que la original, pues solo garantiza que ningún politopo tiene caminos desproporcionadamente largos en comparación con su dimensión y su número de caras. Pero hasta la fecha no hay ningún signo concluyente de que sea verdadera.

Cómo cortar una pizza

Ya sea delante de una tarta, de una pizza o de cualquier otra cosa, quién no se ha sorprendido alguna vez echando el ojo a la porción más grande, o lamentándose en silencio de que la vida le deparara una porción pequeña. A principios de los años noventa, la cuestión de cortar equitativamente una pizza se convirtió en obsesión para los matemáticos Rick Mabry y Paul Deiermann, ambos por aquel entonces en la Universidad del Estado de Luisiana, Estados Unidos. Mabry recuerda cómo se iban a almorzar juntos por lo menos una vez a la semana, dejando que la comida se quedara fría mientras garrapateaban dibujos en el cuaderno que uno de los dos siempre llevaba encima.

Supongamos, por ejemplo, que un atareado camarero corta precipitadamente una pizza sin pasar por el centro, pero de manera que todos los cortes, de lado a lado, pasan por un mismo punto y forman el mismo ángulo con los adyacentes. El corte excéntrico significa que las porciones no tendrán todas el mismo tamaño. Si dos personas van eligiendo por turno porciones contiguas, ¿acabarán con cantidades iguales al terminar de repartirse la pizza? Si no, ¿quién acabará con más?

Una posibilidad es estimar la superficie de cada porción, sumar todas las superficies y calcular el total de cada persona. Pero el objetivo del matemático es reducir los problemas a unas cuantas reglas generales y demostrables que permitan ahorrarse cálculos exactos y que funcionen en todos los casos. El ejemplo más fácil es cuando al menos un corte pasa justo por el centro de la pizza. Las porciones están entonces emparejadas a ambos lados del corte que pasa por el centro, de manera que se pueden distribuir equitativamente entre dos comensales, independientemente del número de cortes que se hagan.

Pero ¿qué ocurre si ninguno de los cortes pasa por el centro? Para una pizza con un solo corte, la respuesta es evidente por simple inspección: quien se coma el centro se lleva la mejor parte. Lo mismo ocurre con una pizza cortada dos veces en cuatro porciones. Pero este caso resulta ser una anomalía. Las tres reglas generales aplicables a un número mayor de cortes solo fueron emergiendo a lo largo de los años subsiguientes, para constituir los teoremas de la pizza completos.

La primera regla establece que si cortamos la pizza por el punto elegido con un número par de cortes mayor que 2, la pizza acabará repartida equitativamente entre dos comensales que vayan tomando por turno porciones consecutivas. Con un número impar de cortes las cosas empiezan a complicarse. En ese caso el teorema de la pizza dice que si hacemos 3, 7, 11, 15… cortes y ninguno de ellos pasa por el centro, entonces la persona que se lleva la porción que incluye el centro de la pizza come más en total. Con 5, 9, 13, 17… cortes, la persona que se queda con el centro termina con menos (véase la figura 8.2).

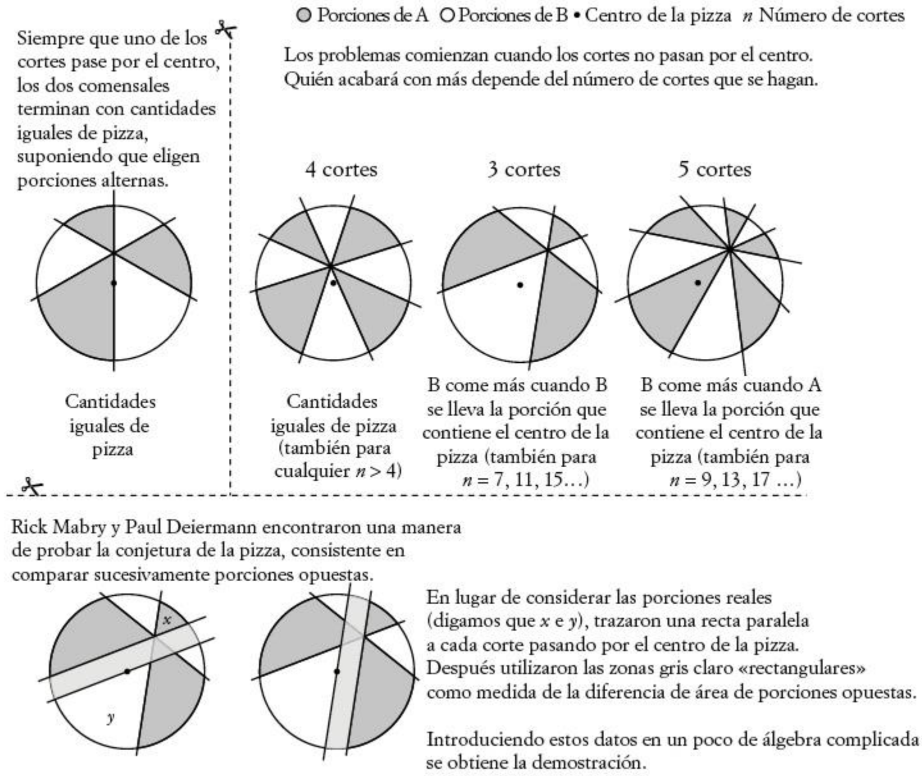


Figura 8.2 La «conjetura de la pizza» pregunta quién obtendrá la mayor cantidad de pizza, suponiendo que los comensales A y B van tomando porciones alternas y que los ángulos entre cortes adyacentes son todos iguales.

Pero demostrar que esto era rigurosamente cierto no fue nada fácil. Deiermann esbozó rápidamente una solución para el problema de los tres cortes. Mabry y él pasaron luego a probarlo para cinco cortes, y después demostraron que si se corta la pizza siete veces se obtiene el mismo resultado que para tres: la persona que se queda con el centro de la pizza acaba comiendo más.

Animados por el éxito, pensaron haber dado con una técnica para probar de una vez por todas el teorema de la pizza en su integridad. Con un número impar de cortes, las porciones opuestas van indefectiblemente a comensales diferentes, así que una solución intuitiva consiste simplemente en comparar el tamaño de porciones opuestas y determinar quién obtiene más, y con qué diferencia, antes de pasar al siguiente par de porciones. Después de dar la vuelta a toda la pizza, sumamos las diferencias y obtenemos la respuesta.

Sin embargo, en la práctica es extremadamente difícil encontrar una solución que cubra todos los posibles números impares de cortes. Los dos matemáticos pensaron poder utilizar un ingenioso truco geométrico para simplificar el problema. La clave era el área de las franjas rectangulares comprendidas entre cada corte y una recta paralela trazada a través del centro de la pizza. Según Mabry, la fórmula del área de las franjas es más fácil que la de las porciones, y las franjas tienen la ventaja adicional de proporcionar una prueba visual muy atractiva de ciertos aspectos del problema. Desgraciadamente, en la solución seguía apareciendo un complicado conjunto de sumas de series algebraicas con incómodas potencias de funciones trigonométricas. Su cálculo llevó 11 años.

El avance decisivo llegó en 2006, estando Mabry de vacaciones en Kempten, en la región de Allgäu en el extremo sur de Alemania, sin ordenador. Dejando a un lado la tecnología, logró remodelar el álgebra y darle una forma manejable y más elegante. De vuelta a casa pensó que alguien, en algún lugar, tenía que haber calculado ya las en apariencia sencillas sumas que constituían el núcleo de la nueva expresión, de modo que se puso a peinar el mundo en línea, dentro del amplio campo de la combinatoria (un área de la matemática pura que se ocupa de alistar, contar y reordenar), en busca de teoremas que pudieran proporcionar el resultado clave que buscaba. Finalmente lo encontró en un artículo de 1999 en el que se citaba un enunciado matemático de 1979. El resto cayó por sí solo y la demostración se publicó finalmente en 2009.

Aparte de cortar equitativamente una pizza y otros alimentos circulares, el teorema de la pizza no tiene aún ninguna aplicación evidente. Pero la cuestión no es esa. «Es gracioso lo que ocurre con algunos matemáticos –dice Mabry–. A menudo no nos importa que los resultados no tengan aplicación alguna, porque en sí mismos son muy bellos». Y, para ser justos, hay que decir que a veces la solución de algunos problemas matemáticos abstractos asoma la cabeza en lugares inesperados. Por ejemplo, una curiosidad matemática del siglo XIX llamada la «curva que rellena el espacio» volvió a aflorar recientemente como modelo de la forma del genoma humano.

Otros matemáticos han tomado desde entonces el cortador de pizza y han hallado por ejemplo una receta para obtener 12 porciones de idéntica forma: seis de ellas forman una estrella que se extiende desde el centro, mientras que las otras seis dividen el resto de la pizza, que incluye el borde. El corte es ideal cuando el centro de la pizza contiene algún ingrediente que no gusta a algunos comensales, que en cambio prefieren los trozos de borde para untar (véase la figura 8.3).

En 2015 Joel Haddley y Stephen Worsley, de la Universidad de Liverpool, Reino Unido, generalizaron la técnica para crear otras formas de corte. Demostraron que es posible crear teselaciones similares con trozos curvos de cualquier número impar de lados –conocidos como 5-gonos, 7-gonos, etc.– dividiéndolos en dos como antes. Matemáticamente no existe ningún límite, dice Haddley, aunque puede que resulte poco práctico llevar el método más allá de los 9-gonos.

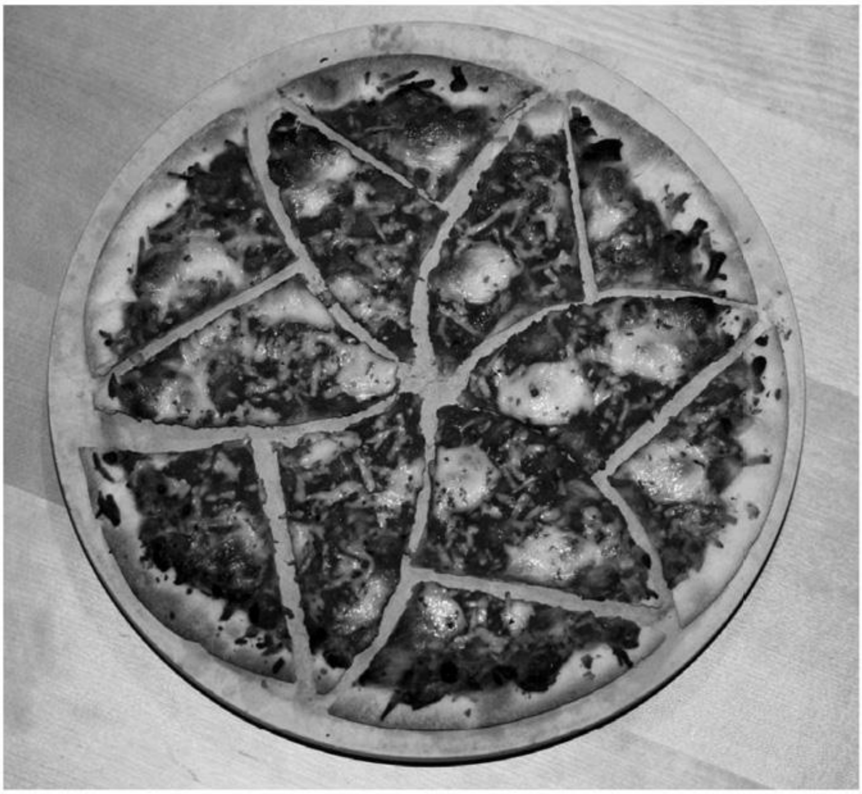


Figura 8.3 Los algoritmos del corte de una pizza pueden producir configuraciones complejas.

Al igual que Mabry, Haddley es optimista en cuanto a las aplicaciones de su trabajo fuera del troceado de pizzas. Para él, es matemáticamente interesante, y produce sabrosas imágenes.

Contra todo pronóstico

En el verano de 1961, delante de la rueda de una ruleta en un casino de Las Vegas, Edward Thorp, estudiante de matemáticas en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, sabía muy bien dónde iba a aterrizar la bola. Salió del casino ganando, se jugó lo ganado a las carreras de caballos, a las apuestas de baloncesto y a la bolsa y se hizo multimillonario. No es que estuviese en racha, sino que utilizó sus conocimientos matemáticos para entender las probabilidades y ganar contra pronóstico.

Thorp iba armado del primer ordenador «portable», un ordenador que podía predecir el resultado del giro de la ruleta. Una vez que la bola estaba en juego, Thorp introducía en el ordenador información sobre la velocidad y posición de la bola y de la rueda utilizando un microconmutador alojado en el zapato. El ordenador daba un pronóstico sobre un resultado probable, y Thorp apostaba a los números vecinos. El dispositivo de Thorp sería ahora ilegal en los casinos. Pero conocer el funcionamiento de las probabilidades puede ayudar a cualquiera a ganar contra pronóstico en diversos juegos…, bueno, más o menos.

Ruleta

Hay una manera sencilla y absolutamente segura de ganar a la ruleta, siempre y cuando tengamos suficientes reservas. Una tirada de ruleta es igual que el lanzamiento de una moneda. Cada tirada es independiente, con una probabilidad del 50 por ciento de que la bola caiga en negro o rojo. En contra de lo que dice la intuición, tras una secuencia de veinte números negros consecutivos la probabilidad de que salga negro es exactamente la misma que la de que salga rojo (que podría parecer más probable). Esta falsa creencia, la de que es más probable que salga rojo, se conoce como la falacia del jugador.

Así, pues, apostamos siempre al mismo color. Si perdemos, doblamos la apuesta en la siguiente tirada. Como el color elegido acabará saliendo en algún momento, el método producirá siempre un beneficio. Lo malo es que se necesita un buen fondo de reserva para continuar jugando. Una secuencia perdedora hace crecer las apuestas muy deprisa: siete tiradas adversas con una apuesta inicial de 10 euros nos colocan ya ante unos abultados 1280 euros en la octava. Por desgracia, las ganancias no aumentan en la misma proporción: cuando se gana, las ganancias solo son iguales a la apuesta inicial. De modo que, aunque la teoría es correcta, es probable que la rueda de la ruleta se lleve nuestro dinero durante más tiempo del que somos capaces de permanecer solventes.

Blackjack

En un juego como el blackjack es posible inclinar las probabilidades a nuestro favor sin más que llevar la cuenta de las cartas, dentro de las reglas, aunque no del espíritu, de un juego de azar.

En el blackjack se comienza por repartir a cada jugador dos cartas boca arriba. Las figuras valen 10 y los ases 1 u 11 a discreción del jugador. El objetivo es reunir el mayor número posible de puntos sin pasarse de 21. Para ganar hay que tener un número de puntos mayor que el de la mesa. Las cartas repartidas se extraen de un sabot, una caja de cartas que contiene de tres a seis mazos. El jugador puede plantarse con las dos cartas iniciales o «pedir» y recibir sucesivamente una o más cartas para intentar acercarse a 21. Si el total del crupier es 16 o menos, el crupier está obligado a pedir. Al final de cada mano se descartan los naipes jugados.

La idea básica del conteo de cartas es llevar la cuenta de los naipes descartados para saber qué queda en el sabot. Un sabot con muchas cartas altas nos será ligeramente favorable; un sabot con muchas cartas bajas favorecerá ligeramente a la mesa. Cuando quedan muchas cartas altas por repartir, es más probable tener 20 o 21 con las dos primeras cartas, mientras que es más probable que el crupier se pase si sus cartas iniciales suman menos de 17. Por razones similares, la abundancia de cartas bajas beneficia al crupier.

Si llevamos la cuenta de las cartas que han salido, es posible calibrar en qué momento el juego se inclina de nuestro lado. La manera más sencilla es empezar en cero y sumar o restar de acuerdo con las cartas repartidas. Añadimos 1 cuando aparece una carta baja (del dos al seis), restamos 1 cuando aparece una carta alta (un diez o más), y no hacemos nada con los sietes, ochos y nueves. Después apostamos de acuerdo con ello: apostamos poco cuando el total del conteo es bajo, y fuerte cuando el total es alto. Este método puede reportar un rendimiento positivo de hasta un 5 por ciento de lo invertido. Es mucho esfuerzo para un rendimiento tan pequeño, pero en esta época de bajos tipos de interés puede que merezca la pena.

Loterías

Alex White no olvidará nunca la tarde del 14 de enero de 1995. Era el noveno sorteo de la Lotería Nacional del Reino Unido, con un bote enorme de 16 millones de libras, y White (nombre figurado) acertó los seis números: 7, 17, 23, 32, 38 y 42. Desafortunadamente, solo ganó 122 510 libras, porque tuvo que repartir el premio con otras 132 personas que habían elegido la misma combinación.

Hay docenas de métodos que pretenden aumentar las probabilidades de ganar a la lotería. Ninguno de ellos funciona. Todas las combinaciones de seis números tienen la misma probabilidad de ganar: 1 entre 13 983 816, para el juego de 49 bolas que jugaba White. (Desde 2015 los jugadores tienen que elegir seis números de 59, con una probabilidad mucho menor aún de ganar el primer premio: 1 entre 45 057 474). Pero, como muestra la historia de White, el hecho de tener que compartir el bote sugiere una manera de maximizar las posibles ganancias: ganar con números que nadie más haya elegido.

Poco después del comienzo de la Lotería Nacional del Reino Unido en 1994, el matemático Simon Cox, de la Universidad de Southampton, Reino Unido, determinó los números preferidos por los jugadores de lotería, analizando datos de 113 sorteos y comparando los números ganadores con el número de personas que habían acertado cuatro, cinco o seis de ellos. El 7 era el favorito, elegido un 25 por ciento de veces más que el número menos preferido, el 46. El 14 y el 18 también gozaban de favor, mientras que el 44 y el 45 estaban entre los menos queridos. Existía una preferencia notable por los números del 1 al 31.

Es lo que se llama «el efecto del día de nacimiento», dice Cox, porque uno de los números elegidos por mucha gente es el del día en que nacieron.

También aparecieron otras pautas. Una de ellas es que los números más elegidos se agolpan alrededor del centro del boleto que hay que rellenar. Otra es que muchos jugadores eligen al parecer los números situados en una de las diagonales del boleto. Existe asimismo una clara aversión hacia los números consecutivos. La gente no suele elegir números seguidos, a pesar de que la combinación 1, 2, 3, 4, 5, 6 es tan probable como cualquier otra. Numerosos estudios sobre las loterías de Estados Unidos, Suiza y Canadá han arrojado los mismos resultados. El rasgo más notable de la popular combinación de números que eligió White es que están distribuidos de manera relativamente uniforme: «parecen» aleatorios.

Para contrastar la idea de que elegir números poco populares puede maximizar las ganancias, Cox simuló un sindicato virtual que compraba 75 000 boletos cada semana, eligiendo los números al azar. Utilizando los resultados reales de los primeros 224 sorteos de lotería en el Reino Unido, calculó que el sindicato habría ganado en total 7,5 millones de libras, con un desembolso de 16,8 libras. Sin embargo, si el sindicato hubiese seleccionado solamente números poco populares habría más que doblado las ganancias.

Por tanto, es mejor elegir números mayores que 31, así como números agrupados o situados en los bordes del boleto. En ese caso, si se aciertan los seis números, es menos probable que haya que compartir el premio. Pero téngase en cuenta que la teoría también predice que probablemente haya que esperar muchos siglos antes de ganar el primer premio.

Carreras

Aunque es casi imposible ganar a un corredor de apuestas experto en su propio juego, si jugamos con dos o tres casas de apuestas podemos ganar, sea cual sea el resultado de la carrera.

Supongamos, por ejemplo, que queremos apostar a uno de los puntos culminantes del calendario deportivo británico, la regata anual entre los viejos rivales de Oxford y Cambridge. Una de las casas de apuestas ofrece 3 a 1 por la victoria de Cambridge y 1 a 4 por Oxford. Pero otro corredor discrepa y está 1 a 1 para Cambridge y 1 a 2 para Oxford.

Cada uno de los corredores se ha cubierto las espaldas, cuidando de que sea imposible apostar a la vez por Oxford y por Cambridge y obtener un beneficio independientemente del resultado. Sin embargo, si repartimos nuestras apuestas entre los dos corredores, es posible garantizarse el éxito. Una vez hechos los cálculos, apostamos 37,50 libras por Cambridge con el corredor 1 y 100 libras por Oxford con el corredor 2. Sea cual sea el resultado, ganamos 12,50 libras.

Garantizarse una ganancia de este modo se conoce por el nombre de «arbitraje», pero las oportunidades de hacerlo son raras y efímeras. Cuantos menos participantes haya en la carrera, mejor funciona. No está necesariamente exento de riesgo, porque quizás no podamos conseguir la apuesta que queremos, exactamente cuando la necesitamos; pero es suficiente para que algunos jugadores profesionales vivan de ello.

Saber cuándo parar

El juego puede ser adictivo, sobre todo cuando uno se ve muy cerca de una combinación o estrategia ganadora. Y eso es un problema incluso estando las matemáticas de nuestro lado: es demasiado fácil olvidar lo que se puede perder. Por suerte, la teoría de la probabilidad puede también aquí servir de ayuda.

Si nos resulta difícil saber cuándo parar, intentemos entender la idea de los «rendimientos decrecientes», que es la herramienta óptima para detenerse. Una manera de explicar este concepto es el llamado problema del matrimonio. Supongamos que nos dicen que nos tenemos que casar y que tenemos que elegir la pareja de entre 100 candidatas o candidatos. Solo podemos entrevistar a cada persona una vez. Después de cada entrevista, hay que decidir si casarse o no con esa persona. Si decidimos que no, perdemos la oportunidad para siempre. Si entrevistamos a 99 sin haber elegido, tenemos que casarnos con la número 100. Cabría pensar que la probabilidad de casarnos con la pareja ideal es de 1 entre 100, pero lo cierto es que podemos hacerlo mucho mejor.

Entrevistemos a la mitad de las personas y detengámonos después en la siguiente mejor, es decir, la primera que sea mejor que la mejor de las ya entrevistadas. Una cuarta parte de las veces, la segunda mejor estará entre las 50 primeras y la mejor de todas en las 50 segundas. De manera que el 25 por ciento de las veces la regla de «parar en la siguiente mejor» dará como resultado casarse con el/la mejor candidato/a.

Y es posible hacerlo aún mejor. John Gilbert y Frederick Mosteller, de la Universidad de Harvard, demostraron que es posible aumentar la probabilidad hasta el 37 por ciento entrevistando a 37 personas y luego parando en la siguiente mejor. El número 37 proviene de dividir 100 entre e, la base de los logaritmos naturales, que es aproximadamente 2,72 (véase el capítulo 5). La ley de Gilbert y Mosteller funciona independientemente del número de candidatos: simplemente se divide el número de opciones entre e. Supongamos que encontramos 50 compañías que ofrecen seguros de automóvil, pero que no tenemos ni idea de si la siguiente tarifa será mejor o peor que la anterior. ¿Debemos pedir la tarifa a las 50? No, telefoneamos a 18 (50 dividido por 2,72) y elegimos la siguiente tarifa que sea mejor que las 18 primeras.

Este método también puede ser útil para decidir el momento óptimo de parar de jugar. Decidamos el número máximo de apuestas que vamos a hacer; 20, por ejemplo. Para maximizar las posibilidades de irnos en el momento oportuno, hacemos siete apuestas y paramos en la siguiente que nos reporte más que la mayor de las ganancias previas.

Funciones espagueti

A la hora de buscar inspiración arquitectónica, el último sitio donde a uno se le ocurriría mirar es en un plato de pasta. Sin embargo, eso fue lo que hizo el arquitecto y diseñador Georges Legendre, que compiló en 2011 la primera taxonomía matemática completa de esta sustancia.

La pasta ha generado una multiplicidad de formas complejas en todo el mundo: espaguetis, raviolis, los macarrones de forma tubular o los *farfalle* en forma de mariposa. Pero eso oculta una simplicidad matemática inesperada; si miramos detenidamente, dice Legendre, quizás solo haya tres formas topológicas básicas: cilindros, esferas y cintas.

Una copa de vino de más una noche en su estudio de arquitectura en Londres fue lo que inspiró a Legendre y a su colega Jean-Aimé Shu para poner orden en ese mundo caótico con ayuda de las matemáticas. Empezaron por encargar grandes cantidades de pasta, y luego, utilizando sus conocimientos de diseño, se pusieron a modelar todas las formas que cayeron en sus manos y a derivar fórmulas para describirlas. Este ejercicio se prolongó durante casi un año.

Para cada forma necesitaban tres expresiones, una por cada una de las tres dimensiones en las que había que describirla. Se obtiene así un conjunto de coordenadas que, representadas en una gráfica, describen fielmente la pasta en 3D. Las formas curvas de la mayoría de las pastas se prestan a representaciones matemáticas mediante funciones de seno y coseno principalmente. En algunos casos la receta correcta era evidente. Los espaguetis, por ejemplo, son básicamente círculos extruidos. El seno y el coseno de un mismo ángulo sirven para definir las coordenadas de los puntos que contienen en su interior la sección transversal, que es invariable, y una simple constante sirve para caracterizar la longitud del espagueti. Análogamente, los *puntalette* en forma de granos de arroz no son más que esferas deformadas. Los senos y cosenos de dos ángulos, junto con diferentes factores multiplicativos para estirar la forma en tres dimensiones, proporcionan su trasunto matemático.

Otras formas son más difíciles de codificar. Los *saccottini* estrujados, por ejemplo, requieren un molde matemático complejo de senos y cosenos multiplicados entre sí. Algunos detalles sencillos, como los extremos biselados de los macarrones, requieren un poco de astucia de modelado, como por ejemplo cortar la pasta en trozos, representado cada uno de ellos por ecuaciones ligeramente diferentes.

Las inflexiones bruscas, como las crestas undulantes de los *galletti* en forma de cresta de gallo, tienen también su dificultad, aunque las funciones trigonométricas vuelven a ser otra vez la mejor herramienta de trabajo: elevando los senos y cosenos a una potencia superior se constriñe la forma suave y undulante de la función en algo parecido a una punta. Una técnica similar sirve para estirar la función en algo parecido a un ángulo recto.

Al final, Legendre acabó con un compendio de 92 formas de pasta, cada una de ellas modelada y clasificada exactamente en categorías de acuerdo con las relaciones matemáticas reveladas entre ellas, algunas evidentes, otras no tanto. Las cintas retorcidas de las *sagne incannulate* y los «sombreritos», los *cappelletti*, resultan ser topológicamente idénticos: con una cantidad suficiente de pasta modelable, unas manos diestras podrían estirar, retorcer y remodelar una forma en otra sin la intervención de cuchillo ni tijeras.

La taxonomía de la pasta de Legendre es una prueba lúdica de que lo que en principio es una variedad inmensa y aparentemente compleja se puede reducir a bases matemáticas sencillas. Un planteamiento similar podría conducir a una manera nueva y más eficiente de partir del diseño y traducirlo a ingeniería, lo que sería útil para estructuras mucho más grandes. Por ejemplo, los planos de un rascacielos todo lo complejo que se quiera podrían reducirse a ecuaciones para cada una de las tres dimensiones, igual que las que definen las formas de la pasta. Para Legendre, las ecuaciones de una sección transversal indican un suelo, con una tercera ecuación para la altura.

El puente Henderson Waves en Singapur, proyectado por Legendre (véase la figura 8.4) y cuyas formas onduladas recuerdan bastante a las graciosas curvas de la pasta, fue modelado utilizando exactamente los mismos principios. «Simplemente les di a los ingenieros las ecuaciones», dice.

Figura 8.4 Las curvas del puente Henderson Waves en Singapur están influidas por estudios de la topología de las formas de pasta.

Por qué la democracia es siempre injusta

En un mundo ideal, las elecciones deberían ser dos cosas: libres y justas. Cualquier adulto, con algunas razonables excepciones, debería poder votar por el candidato que quisiera, y cada voto debería valer lo mismo.

Garantizar una votación libre compete a la ley. Hacer que las elecciones sean justas es más bien asunto de los matemáticos. Los numerosos sistemas electorales democráticos al uso en el mundo intentan encontrar el equilibrio entre justicia matemática y consideraciones políticas como la responsabilidad (*accountability*) y la necesidad de un gobierno fuerte y estable. Los matemáticos y otros profesionales llevan cientos de años estudiando los sistemas electorales en busca de fuentes de sesgo susceptibles de distorsionar el valor de los votos individuales y la manera de evitarlas.

En 1963 el economista estadounidense Kenneth Arrow hizo una lista de los atributos generales de un sistema electoral justo ideal. Sugirió lo siguiente: los votantes deberían poder expresar un conjunto completo de preferencias; ningún votante en particular debería poder determinar por sí solo el resultado de la elección; si todos los votantes prefieren a uno de los candidatos, el resultado final debería reflejarlo; y si un votante prefiere un candidato a otro, la introducción de un tercer candidato no debería invertir esa preferencia.

Todo esto suena muy razonable, pero hay un problema: Arrow y otros demostraron también que no hay ningún sistema electoral que pueda satisfacer las cuatro condiciones. En particular, siempre existirá la posibilidad de que un votante, cambiando simplemente su voto, cambie la preferencia global de todo el electorado. Así que solo nos queda elegir lo menos malo y pechar con las imperfecciones matemáticas que presentan los distintos sistemas.

Sufragio directo

El sistema de sufragio directo (también llamado uninominal mayoritario) se utiliza en las elecciones generales en Canadá, India, Reino Unido y Estados Unidos. El principio es simple: cada circunscripción electoral elige un representante, que es el candidato que obtiene más votos.

Este sistema puntúa alto en estabilidad y responsabilidad, pero en lo que se refiere a justicia matemática es un fracaso. Los votos de todos, menos los del candidato ganador, son ignorados. Si por una circunscripción compiten más de dos partidos con apoyo sustancial, como ocurre muchas veces en Canadá, India y Reino Unido, no hace falta que el candidato consiga el 50 por ciento de los votos para ganar, de modo que la mayoría de los votos «se pierden».

Esto significa que un partido puede ganar sin más que quedar ligeramente por delante de sus adversarios en la mayoría de las circunscripciones electorales. Así, por ejemplo, en las elecciones generales de 2005 en el Reino Unido el Partido Laborista en el gobierno ganó el 55 por ciento de los escaños con solo el 35 por ciento del total de votos. Si un candidato o un partido está ligeramente por delante en una mayoría simple de las circunscripciones, pero muy por detrás en otras, puede ganar aunque el adversario obtenga más votos en total, como el conocido caso, en la historia reciente, de la derrota de Hillary Clinton frente a Donald Trump en las elecciones presidenciales de Estados Unidos en 2016.

En los sistemas de sufragio directo, las fronteras de los distritos electorales tienen su importancia. Para garantizar que cada voto tenga aproximadamente el mismo peso, cada circunscripción debería tener aproximadamente el mismo número de votantes. Trazar límites tortuosos entre centros de población y a través de ellos so pretexto de garantizar la imparcialidad es también una manera descarada de hacer trampas en beneficio propio. Esta práctica se conoce como *gerrymandering*, por el gobernador de Massachusetts Elbridge Gerry, que allá por el siglo XIX creó una circunscripción electoral cuya forma, en opinión del editor de un periódico local, recordaba a una salamandra (véase la figura 8.5).

Supongamos que una ciudad controlada por el partido Liberal Republicano (LR) tiene una población electoral de 900 000 dividida en tres circunscripciones. Las encuestas dicen que en las próximas elecciones LR va a ser derrotado: 400 000 personas tienen la intención de votarle, pero otras 500 000 van a optar por el partido Democrático Conservador (DC). Si los límites de las circunscripciones mantuvieran iguales las proporciones, cada circunscripción tendría aproximadamente 130 000 votantes LR y 170 000 votantes DC, y DC ganaría los tres escaños, la habitual injusticia de los sistemas de sufragio directo.

En realidad, los votantes que se inclinan por un determinado partido estarán probablemente agrupados en los mismos barrios de la ciudad, por lo cual LR podría retener un escaño. Sin embargo, LR puede fácilmente modificar los límites de las circunscripciones para alterar el resultado y asegurarse la mayoría, como muestran las dos estrategias de la figura 8.6.

Figura 8.5 El término *gerrymandering* vino inspirado por una complicada circunscripción de distritos electorales en el Massachusetts del siglo XIX.

Las anomalías de un sistema de sufragio directo pueden ser sin embargo más sutiles, como demostró el matemático Donald Saari, de la Universidad de California, Irvine. Supongamos que se pide a 15 personas que ordenen tres bebidas, leche (L), cerveza (C) y vino (V), por orden de preferencia. Seis contestan L-V-C, cinco C-V-L y cuatro V-C-L. En un sistema de sufragio directo, en el que solo cuentan las primeras preferencias, el resultado es sencillo: la leche gana con un 40 por ciento de los votos, seguida de la cerveza y con el vino en último lugar.

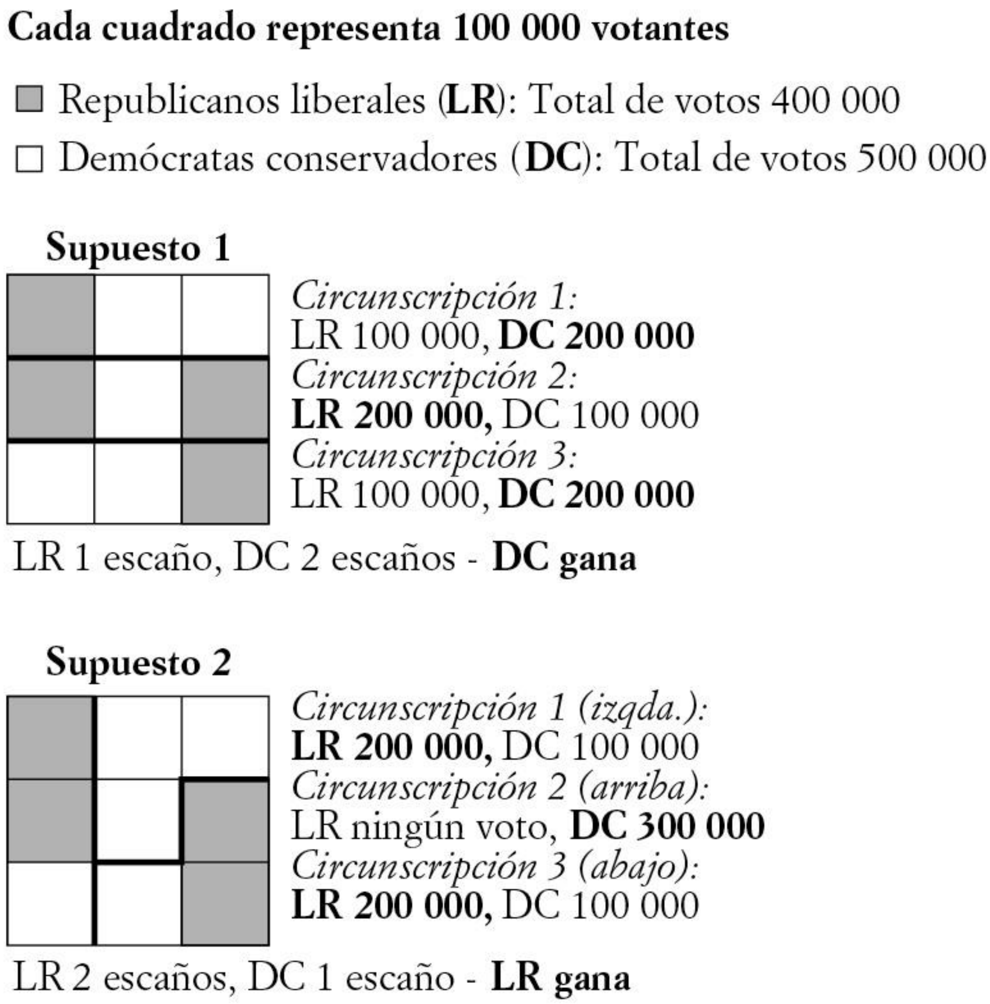


Figura 8.6 En un sistema de sufragio directo, el trazado de los límites de las circunscripciones puede determinar el resultado.

¿Quiere eso decir que los votantes prefieren realmente la leche? Nada de eso. Nueve prefieren la cerveza a la leche, y nueve prefieren el vino a la leche: mayorías claras en ambos casos. Por otro lado, diez prefieren el vino a la cerveza. Cruzando estas preferencias vemos que el orden de preferencia real es V-C-L, es decir, exactamente lo contrario de lo que arrojó el sistema de votación. De hecho, Saari demostró que, dado un conjunto de preferencias de los votantes, se puede diseñar un sistema que produzca cualquier resultado que se quiera.

En el ejemplo anterior, el sistema de sufragio directo produjo un resultado anómalo porque los bebedores de alcohol se mantuvieron unidos: los bebedores de vino y de cerveza eligieron ambos al otro como segunda preferencia y relegaron la leche al tercer puesto. Cosas parecidas ocurren en la política cuando dos partidos tienen su caladero en el mismo grupo de electores, con lo cual dividen los votos entre ellos y permiten que un tercer partido no preferido por la mayoría gane las elecciones.

Desafortunadamente, evitar este tipo de injusticia y conservar al mismo tiempo las ventajas del sistema de sufragio directo solo es posible hasta cierto punto. Una posibilidad es una segunda vuelta entre los dos candidatos mejor colocados, como ocurre en Francia y en las elecciones presidenciales de muchos otros países. Pero no hay garantía de que los dos candidatos con el mayor apoyo potencial lleguen siquiera a la segunda vuelta. En las elecciones presidenciales francesas de 2017, por ejemplo, la división del voto entre los bloques tradicionales de izquierda y derecha hizo que la segunda vuelta se disputase entre una candidata de la extrema derecha, Marine Le Pen, y el insurgente liberal Emmanuel Macron. En 2002 la segunda vuelta acabó disputándose entre un candidato de centroderecha y otro de extrema derecha.

Voto alternativo

El sistema de voto alternativo o preferencial es una estrategia que permite a los votantes colocar a los candidatos por orden de preferencia, con un 1, 2, 3, etc. Después de contar los votos de primera preferencia, se elimina al candidato con menos números de votos y se asignan los votos a los candidatos marcados como segunda preferencia en esas papeletas. El proceso continúa hasta que un candidato tiene el apoyo de más del 50 por ciento de los votantes. Este sistema, llamado también de segunda vuelta instantánea o voto preferencial, se utiliza en las elecciones a la Cámara de Representantes australiana, así como en varias ciudades de los Estados Unidos. Fue rechazado en un referéndum para cambiar el sistema de elecciones parlamentarias en el Reino Unido en 2011.

El voto preferencial se acerca más a un sistema justo que el voto mayoritario o de sufragio directo, pero no elimina las paradojas de ordenación. El marqués de Condorcet, matemático francés, ya lo observó en 1785. Supongamos que tenemos tres candidatos A, B, C y tres votantes que los ordenan A-B-C, B-C-A y C-A-B, respectivamente. Los votantes prefieren A antes que B por 2 a 1. Pero B es preferido sobre C, y C es preferido sobre A, por el mismo margen de 2 a 1. Como dice el dodo en *Alicia en el país de las maravillas*: «Todos han ganado y todos tienen que tener premio».

Representación proporcional

Un tipo de sistema de votación que evita por completo las paradojas de ordenación es la representación proporcional. A cada partido se le asigna un número de escaños parlamentarios en proporción directa al número de personas que votaron por él. Un sistema así es sin duda más justo en sentido matemático que el voto mayoritario o el preferencial, pero tiene inconvenientes políticos. Implica circunscripciones grandes, con muchos representantes; lo más próximo a una representación verdaderamente proporcional es una sola circunscripción, el sistema utilizado en Israel. Pero las circunscripciones grandes debilitan la relación entre los votantes y sus representantes. Los candidatos se eligen a menudo a partir de una lista determinada centralmente, de manera que los votantes tienen poco o ningún control sobre quiénes les representan.

Y la representación proporcional tiene sus propias arrugas matemáticas. Por ejemplo, no hay manera de asignar un número entero de escaños en proporción exacta a una población más grande. Esto puede conducir a una situación extraña en la que aumentar el número total de escaños disponibles reduce la representación de una circunscripción individual, aunque su población permanezca igual.

Las elecciones a la Cámara de Representantes de los Estados Unidos utilizan un sistema mayoritario, pero la Constitución de este país establece que los escaños «se prorratearán entre los distintos Estados […] de acuerdo con su población respectiva», es decir, proporcionalmente. En 1880 el secretario general de la Oficina del Censo de los Estados Unidos, Charles Seaton, descubrió que Alabama obtendría ocho escaños en una Cámara de 299 escaños, pero solo siete si tuviese 300. Esta «paradoja de Alabama» era la consecuencia de un algoritmo conocido como el método del resto mayor, utilizado para redondear (a un número entero) el número de escaños que recibiría un estado aplicando una proporcionalidad estricta.

Supongamos, en aras de la sencillez, que un país de 39 millones de electores tiene un parlamento de cuatro escaños, lo que da una cuota de 9,75 millones de electores por escaño. Sin embargo, los escaños se tienen que repartir entre tres estados, Alabaska, Bolorado y Carofornia, con poblaciones electorales de 21, 13 y 5 millones, respectivamente. Dividiendo estos números por la cuota obtenemos la proporción equitativa de escaños de cada estado: 2,15, 1,33 y 0,51. Los estados obtienen este número de escaños, redondeado al entero inferior. Los escaños sobrantes van al estado o estados con los restos más grandes: en este caso Carofornia. Así, Alabaska obtiene dos escaños y Bolorado y Carofornia uno cada uno.

Supongamos ahora que el número de escaños aumenta de cuatro a cinco. La cuota es 39 millones dividido entre 5, o 7,8 millones. Las proporciones equitativas para los tres estados son ahora 2,69, 1,67 y 0,64. Los enteros redondeados hacia abajo cubren tres escaños, como antes. Los dos sobrantes van a Alabaska y Bolorado, que tienen los restos más grandes, y Carofornia pierde su único escaño. (La Constitución de los Estados Unidos estipula que todos los estados tienen que tener como mínimo un representante, protegiendo así a Carofornia en este caso; el tamaño de la Cámara tendría que aumentar en un escaño.)

Pegas como esta significan que en los sistemas proporcionales los escaños se asignan hoy día utilizando generalmente algoritmos que se conocen por el nombre de métodos de los divisores. Consisten en dividir las poblaciones de votantes por un factor común, de manera que al redondear las proporciones a un número entero la suma sea igual al número de escaños disponibles. Pero el método no es perfecto: a veces da a un distrito electoral más escaños que el número entero más próximo a su justa proporción.

Una de las críticas a los sistemas de voto proporcional es que reducen la probabilidad de que un partido obtenga la mayoría de los escaños disponibles, incrementando así el poder de los partidos más pequeños, como «hacedores de reyes» que pueden modificar a su antojo el equilibrio entre los partidos rivales. Lo mismo puede ocurrir en un sistema mayoritario si la aritmética electoral da como resultado un parlamento «colgado», en el que ningún partido tiene mayoría absoluta, como ocurrió, por ejemplo, en las elecciones generales de 2017 en el Reino Unido.

¿Dónde reside el poder en tales situaciones? Una manera de cuantificar la cuestión es utilizar el índice de poder de Banzhaf. Para ello es preciso hacer una lista de todas las combinaciones de partidos que podrían formar una coalición mayoritaria, y después contar en todas esas coaliciones cuántas veces un partido es un socio «bisagra» que podría destruir la mayoría si abandonara la coalición. Dividiendo este número por el número total de socios bisagra en todas las posibles coaliciones mayoritarias se obtiene el índice de poder de un partido.

Por ejemplo, imaginemos un parlamento de seis escaños en el que el partido A tiene tres, el B tiene dos y el C uno. Hay tres maneras de formar una coalición con una mayoría de al menos cuatro escaños: AB, AC y ABC. En los dos primeros casos, ambos partidos son socios bisagra. En el tercer caso, solo lo es el A, porque si B o C se van, la coalición restante seguiría teniendo mayoría. Del total de cinco socios bisagra en las tres coaliciones, A lo es tres veces y B y C una vez cada uno. Así, A tiene un índice de poder de 3/5, o 0,6 o 60 por ciento –más que el 50 por ciento de los escaños que tiene– y B y C solo «valen» cada uno un 20 por ciento.

9. Los números y la realidad

Las matemáticas son el lenguaje de la física y de todas las ciencias basadas en ella. En este capítulo abordamos aspectos de los números ya tratados anteriormente, con el fin de explorar con más detalle una cuestión esencial mencionada al principio: ¿hasta qué punto vivimos en un universo matemático?

¿Está todo hecho de números?

Cuando Albert Einstein (véase la figura 9.1) completó finalmente su teoría de la relatividad general en 1915, miró las ecuaciones y descubrió un mensaje inesperado: el universo está en expansión. Pero como Einstein no creía que el universo físico pudiera contraerse o expandirse, ignoró lo que las ecuaciones le estaban diciendo. Aproximadamente una década después, Edwin Hubble y otros encontraron claras pruebas de la expansión del universo. Einstein había perdido la ocasión de hacer la predicción científica más espectacular de la historia.

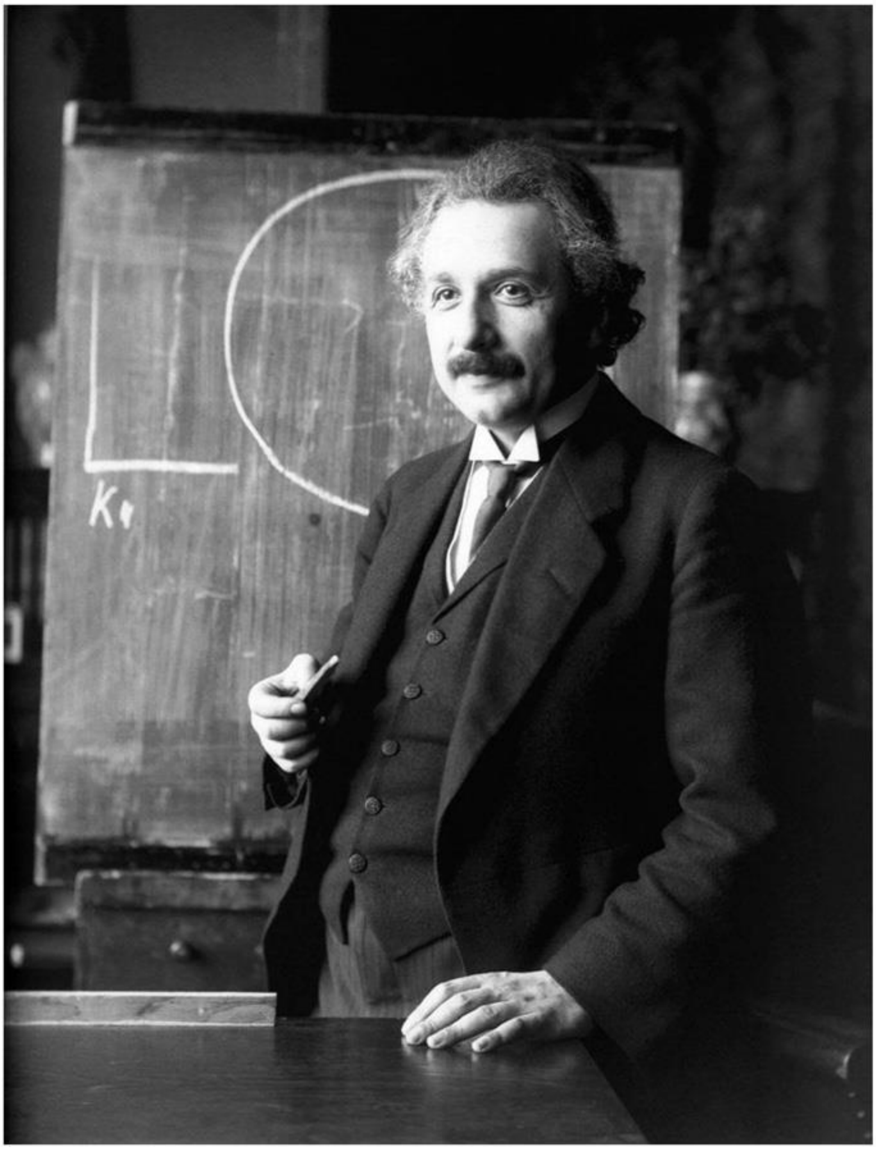


Figura 9.1 Albert Einstein era un genio de la física, pero ¿cómo «sabían» sus ecuaciones que el universo se expande cuando todo el mundo lo ignoraba en aquel momento?

¿Cómo «sabían» las ecuaciones de Einstein que el universo se expande, cuando él mismo lo ignoraba? Si las matemáticas no son más que un invento del cerebro humano, ¿cómo pueden producir algo más allá de lo que introducimos en ellas? La presciencia de las matemáticas sigue pareciendo igual de milagrosa hoy día. En el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN en Suiza, los físicos observaron recientemente las huellas de una partícula que se cree que el físico teórico Peter Higgs y otros descubrieron en 1964 agazapada en las ecuaciones de la física de partículas.

¿Cómo es posible que las matemáticas sepan algo de la partícula de Higgs o de cualquier otra característica de la realidad física? El físico Brian Greene, de la Universidad de Columbia en Nueva York, sostiene que quizás sea porque las matemáticas *son* realidad. Es posible que, ahondando lo suficiente, encontráramos que los objetos físicos como las mesas y las sillas están constituidos en último término, no por partículas o cuerdas, sino por números. Podría ser incluso cierto que el universo entero está hecho de matemáticas, no de materia.

Desde luego no es fácil entender qué significa que el universo «está hecho de matemáticas». Un punto de partida evidente es preguntarse de qué están hechas las matemáticas. El físico John Wheeler dijo en una ocasión que «la base de todas las matemáticas es 0 = 0», refiriéndose a la idea de que todas las estructuras matemáticas se pueden derivar de algo llamado «el conjunto vacío», el conjunto que no contiene ningún elemento (véase el capítulo 2). Si seguimos anidando la nada como muñecas rusas invisibles, al final aparece toda la matemática.

Esa podría ser la clave última de la existencia: al fin y al cabo, un universo hecho de nada no requiere ninguna explicación. En efecto, las estructuras matemáticas no parecen requerir ningún origen físico en absoluto. Según el físico Max Tegmark, del Instituto Tecnológico de Massachusetts en Cambridge, Estados Unidos, jamás se ha creado un dodecaedro. Para que algo sea creado tiene primero que no existir en el espacio y en el tiempo y luego existir. Un dodecaedro no existe en el espacio y en el tiempo, dice Tegmark; existe independientemente de ellos. A su vez, el espacio y el tiempo están contenidos ellos mismos en estructuras matemáticas más grandes que simplemente existen; no pueden ser creadas ni destruidas.

Eso plantea una gran pregunta: el universo ¿por qué está hecho solo de algunas de las matemáticas disponibles? Hoy día, solo tiene realización en el mundo físico una minúscula porción de las matemáticas. Cojamos cualquier libro de texto de la estantería y la mayoría de las ecuaciones contenidas en él no tienen correspondencia alguna con ningún objeto ni proceso físico.

Es cierto que algunas matemáticas en apariencia arcanas y poco físicas resultan a veces tener correspondencia en el mundo real. Por ejemplo, en un tiempo se pensó que a los números imaginarios les cuadraba plenamente su nombre, pero hoy se utilizan para describir el comportamiento de las partículas elementales (véase el capítulo 5); y la geometría no euclidiana acabó apareciendo como la gravedad. Aun así, estos fenómenos representan una parte ínfima de toda la matemática existente.

¿Y las matemáticas no utilizadas por el universo? Tegmark piensa que otras estructuras matemáticas se corresponden con otros universos. Lo llama el «multiverso de nivel 4», y este multiverso es mucho más extraño que los multiversos que los cosmólogos como él discuten a menudo. Estos últimos, los multiversos corrientes y molientes, están gobernados por las mismas reglas matemáticas básicas que nuestro universo, mientras que el multiverso de nivel 4 de Tegmark opera con unas matemáticas completamente distintas.

Todo esto suena raro, pero la hipótesis de que la realidad física es fundamentalmente matemática ha superado todas las pruebas. Si la física tropezara con un obstáculo de manera que fuese imposible seguir adelante, podríamos concluir que la naturaleza no puede ser aprehendida matemáticamente. Pero, según Tegmark, es realmente notable que eso no haya ocurrido. Galileo dijo que el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y eso fue hace 400 años.

Si en el fondo la realidad no es matemática, entonces ¿qué es? «Quizás algún día nos encontremos con una civilización extraterrestre y les enseñemos lo que hemos descubierto sobre el universo –dice Greene–. Dirán: “¡Ah, las matemáticas! Lo hemos probado. Solo te llevan hasta un determinado punto. Aquí está lo que funciona”. ¿Qué sería eso? Difícil de imaginar. Nuestra comprensión de la realidad fundamental está todavía en una fase temprana».

En ninguna parte como con el infinito es tan evidente el conflicto entre una concepción matemática de la realidad y la propia realidad. El infinito es esencial para la estructura de las matemáticas (véase el capítulo 3). Pero cuando se trata de teorías que pretenden describir la realidad física, su utilidad es menos evidente. En gran parte de la física, la aparición de un infinito significa generalmente que algo está mal en la teoría.

Pensemos en el modelo estándar de la física de partículas. Mientras que la relatividad general de Einstein explica la gravedad, el modelo estándar explica todas las demás fuerzas de la naturaleza. Este modelo se basa en teorías cuánticas y estuvo durante mucho tiempo plagado de infinitos patológicos. La electrodinámica cuántica, la parte del modelo estándar que trata de la fuerza electromagnética, mostraba inicialmente que la masa y la carga del electrón eran infinitas.

Décadas de trabajo, recompensadas por muchos premios Nobel, desterraron estos absurdos infinitos, o mejor dicho, la mayoría de ellos. Pero, como es sabido, la gravedad se ha resistido a la unificación con las demás fuerzas de la naturaleza dentro del modelo estándar porque parece inmune a los mejores trucos de los físicos para neutralizar los efectos del infinito. En circunstancias extremas, como en las entrañas de un agujero negro, las ecuaciones de la relatividad general de Einstein sucumben, al hacerse la materia infinitamente densa y caliente, y el espacio-tiempo infinitamente deformado.

Pero es en el *Big Bang* donde el infinito causa más estragos. De acuerdo con la teoría de la inflación cósmica, el universo experimentó un estallido de rápida expansión en su primera fracción de segundo. La inflación explica características esenciales del universo, entre ellas la existencia de estrellas y galaxias. Pero la teoría dice que la inflación no puede parar. Mucho tiempo después de asentarse nuestro universo, la inflación continúa hinchando otros fragmentos del espacio-tiempo, creando un multiverso infinito en un flujo eterno de *big bangs*. En un multiverso infinito, todo cuanto pueda ocurrir ocurrirá un número infinito de veces. Semejante cosmología predice cualquier cosa, que es lo mismo que decir que no predice nada.

Este desastre se conoce como el problema de la medida, porque la mayoría de los cosmólogos creen que se arreglará con la correcta «medida de probabilidad» que nos diría cuál es la probabilidad de acabar en una clase concreta de universo y restaurar así nuestro poder de predicción. Pero otros piensan que falta algo más fundamental. «La inflación está diciendo: eh, hay algo completamente mal en lo que estamos haciendo –dice el físico Max Tegmark–. Hay algo muy fundamental que hemos dado por supuesto y que está mal».

Para Tegmark, ese algo es el infinito. Los físicos tratan el espacio-tiempo como un continuo matemático infinitamente extensible; igual que la recta de los números reales, no tiene lagunas. Si se abandona ese supuesto, toda la historia del cosmos cambia. La inflación extenderá el espacio-tiempo solamente hasta que se rompa. La inflación se ve entonces forzada a cesar, dejando un multiverso grande pero finito. Tegmark piensa que todos nuestros problemas con la inflación y el problema de la medida provienen directamente del supuesto del infinito. Es, dice, el último supuesto no contrastado.

Y existen buenas razones para pensar que en realidad no necesitamos el infinito para describir el universo. Los estudios de las propiedades cuánticas de los agujeros negros llevados a cabo por Stephen Hawking y Jacob Bekenstein en los años setenta condujeron al desarrollo del principio holográfico, que establece que la máxima cantidad de información que puede caber en cualquier volumen de espacio-tiempo es aproximadamente proporcional a un cuarto del área de su horizonte. El máximo número de bits de información que puede contener un universo del tamaño del nuestro es aproximadamente 10^{122}. Si el universo está realmente gobernado por el principio holográfico, no hay desde luego espacio suficiente para el infinito.

Sea o no sea cierto lo anterior, ni siquiera el mejor de los aparatos medirá nunca nada físico con precisión infinita. Los mejores relojes atómicos miden los incrementos temporales con menos de veinte cifras decimales. El momento magnético anómalo del electrón, una medida de pequeñísimos efectos cuánticos sobre el espín de la partícula, se ha determinado con catorce cifras decimales.

Tegmark, por su parte, se muestra fascinado por el hecho de que los cálculos y simulaciones que los físicos utilizan para contrastar una teoría frente a los hechos escuetos del mundo se pueden realizar todos ellos con un ordenador finito. Esto demuestra que no necesitamos el infinito para las cosas que estamos haciendo. Es más, señala, no hay absolutamente ninguna prueba de que la naturaleza lo esté haciendo de manera diferente, de que la naturaleza necesite procesar una cantidad infinita de información.

Infinitos cuánticos

Seth Lloyd, físico y experto en información cuántica, que también trabaja en el MIT, aconseja cautela con semejantes analogías entre el cosmos y un ordenador ordinario, finito. Según él, no hay pruebas de que el universo se comporte como un ordenador clásico. Pero hay muchos indicios de que se comporta como un ordenador cuántico.

A primera vista no parece que eso plantee ningún problema a quienes desean desterrar el infinito. La física cuántica nació cuando, a finales del siglo XX, el físico Max Planck mostró qué hacer con otro absurdo infinito. Las teorías clásicas indicaban que la cantidad de energía emitida por un cuerpo perfectamente absorbente y radiante debería ser infinita, lo cual claramente no era el caso. Planck resolvió el problema sugiriendo que la energía viene, no en la forma de un continuo infinitamente divisible, sino en paquetes discretos: en cuantos.

Las dificultades comienzan con el gato de Schrödinger. Cuando nadie está mirando, el famoso felino cuántico puede estar muerto y vivo al mismo tiempo: flota en una «superposición» de múltiples estados mutuamente excluyentes que se entremezclan continuamente. Matemáticamente, este continuo solo se puede representar utilizando infinitos. Lo mismo es válido para los cúbits de un ordenador cuántico, que puede realizar simultáneamente cantidades ingentes de cálculos mutuamente excluyentes, siempre y cuando nadie exija una salida.

Según Lloyd, si quisiéramos especificar el estado completo de un cúbit haría falta una cantidad infinita de información.

Max Tegmark no se inmuta. Señala que cuando se descubrió la mecánica cuántica, nos dimos cuenta de que la mecánica clásica era solo una aproximación. Piensa que va a haber otra revolución y que entonces veremos que la mecánica cuántica continua es a su vez solo una aproximación de otra teoría más profunda, completamente finita.

Para los físicos en busca de una salida hacia adelante es fácil ver el atractivo de desterrar el infinito. Quizás podríamos ver la manera de unificar la física, uniendo la gravedad con la teoría cuántica. En cuanto a la preocupación particular de Tegmark, el problema de la medida, nos veríamos liberados de la necesidad de encontrar una medida de probabilidad arbitraria para restaurar el poder predictivo de la cosmología. En un multiverso finito, podríamos simplemente contar las posibilidades. Si existiese realmente un número máximo, entonces solo haría falta contar hasta ahí.

Hugh Woodin, matemático de la Universidad de Harvard, preferiría separar las dos cuestiones, la de los infinitos físicos y la de los matemáticos, visto lo esencial que ha demostrado ser el infinito en la teoría de conjuntos, el fundamento de las matemáticas modernas. «Podría muy bien ser que la física fuese completamente finita –dice–. Pero en ese caso nuestra concepción de la teoría de conjuntos representa el descubrimiento de una verdad que de algún modo está mucho más allá del universo físico».

El universo ¿es aleatorio?

«¡Oh! ¡Soy el juguete de la fortuna!», exclama Romeo. Habiendo matado a Tybal y dándose cuenta de que tiene que abandonar Verona o exponerse él mismo a la muerte, sus palabras expresan una idea corriente en los tiempos de Shakespeare: la de que somos simples marionetas, con alguna causa superior que maneja los hilos. En el capítulo 6 vimos la aleatoriedad, el azar y la probabilidad. Puede que sean buenas herramientas matemáticas para modelar un mundo en el que sabemos poco, pero ¿hay algo en el mundo que sea realmente aleatorio?

Mucho antes de que los dados se utilizaran para el juego se utilizaban ya para la adivinación. Los pensadores de la Antigüedad creían que el resultado de las tiradas de dados lo determinaban los dioses; la aparente aleatoriedad se debía a nuestra ignorancia de las designios divinos. Curiosamente, la ciencia moderna hizo al principio poco para modificar esta visión. Las leyes del movimiento y de la gravitación establecidas por Isaac Newton conectaban casi todo en el cosmos con un mecanismo dirigido por una mano celestial. El movimiento de las estrellas y los planetas seguía las mismas leyes estrictas que un carro tirado por un asno. En este universo de relojería, cada efecto tenía una causa identificable.

Si bien el universo de Newton dejaba poco margen para el azar, al menos proporcionaba las herramientas para adivinar los designios del Todopoderoso. Si uno tuviese acceso a todos los hechos relevantes relativos a la tirada de un dado –trayectoria, velocidad, rugosidad de la superficie, etc.– podría, en teoría, utilizar las matemáticas para calcular qué cara terminaría mostrando el dado. En la práctica es un ejercicio demasiado complejo para nuestro cerebro o para cualquier ordenador que hayamos inventado hasta ahora. Pero demostró que la aleatoriedad no era nada intrínseco; era solo un reflejo de nuestra falta de información (figura 9.2).

Figura 9.2 La manera en que funciona el mundo parece a menudo aleatoria, pero podría ser debido a que nos falta información para decir por qué las cosas suceden como suceden.

La confianza en la predictibilidad cósmica llevó al matemático y físico francés Pierre-Simon de Laplace a afirmar, un siglo después de Newton, que una inteligencia suficientemente informada podría predecir todo lo que va a ocurrir en el universo; y, yendo hacia atrás, todo lo que ha acontecido, desde los mismos comienzos del cosmos. Es una idea gloriosa y más bien incómoda. Si realmente todo es predecible, ¿todo está entonces predeterminado y el libre albedrío es una ilusión? En otras palabras, ¿Romeo tenía razón?

Fue solo unos dos siglos después de Newton cuando alguien empezó a poner seriamente en tela de juicio la noción de un cosmos predecible. En 1859 el físico escocés James Clerk Maxwell señaló las enormes disparidades que pueden producirse en los resultados como consecuencia de pequeñísimos factores relacionados con las colisiones moleculares. Este fue el comienzo de la teoría del caos. En su versión más conocida (la del efecto mariposa: cuando el aleteo de una mariposa en Brasil podría desencadenar un tornado en Texas, según lo formuló el teórico del caos Edward Lorenz en 1972), esto parece restaurar la impredecibilidad del mundo. Con un sistema suficientemente complejo, incluso la mínima aproximación al trabajar en los límites de nuestro reloj, nuestro barómetro o nuestra regla, o el más ligero error de redondeo en un cálculo puede modificar drásticamente el resultado. Esto es lo que hace tan difícil pronosticar el tiempo meteorológico. Su estado final depende en alto grado de la medida inicial, y nunca podemos disponer de una medida inicial perfecta.

Pero hasta ahora no estamos más que arañando la superficie. Aunque parece que ocupamos una realidad en la que las causas llevan a efectos predecibles, si escarbamos un poco se ve que aparentemente no es así como funcionan las cosas. La llegada de la teoría cuántica nos puso delante de una realidad matemática bastante diferente.

La teoría cuántica es nuestra teoría operativa de la realidad en su nivel más básico, una teoría que explica el funcionamiento de las partículas fundamentales de la materia y las fuerzas que actúan sobre ellas, con la notable excepción de la gravedad. Desarrollada por etapas desde principios del siglo XX, descarta por entero la certeza férrea e irrebatible. Los experimentos cuánticos nos enseñan que la naturaleza es fundamentalmente aleatoria.

Si disparamos un único fotón de luz contra un espejo semiplateado, el fotón puede atravesar el espejo o ser reflejado: las reglas cuánticas no nos proporcionan ninguna manera de saberlo de antemano. Si damos a un electrón la elección de pasar por una u otra de dos rendijas practicadas en la pared, el electrón elige al azar. Si esperamos a que un único átomo radiactivo emita una partícula, podríamos tener que esperar un milisegundo o un siglo. Esta actitud más bien «pasota» hacia las certidumbres clásicas podría incluso explicar por qué estamos siquiera aquí. Un vacío cuántico que no contiene nada puede generar aleatoria y espontáneamente algo. Una casual fluctuación de energía podría ser la mejor explicación de cómo comenzó el universo.

Explicar la explicación tiene más intríngulis. No sabemos de dónde salen las reglas cuánticas; lo único que sabemos es que las matemáticas que hay detrás de ellas, enraizadas en la incertidumbre, se corresponden estrechamente con la realidad observada. La cosa empieza con la ecuación de Schrödinger, que describe cómo evolucionan en el tiempo las propiedades de una partícula cuántica. La posición de un electrón, por ejemplo, viene dada por una «amplitud» esparcida por el espacio, dentro de una función de onda matemática probabilística que describe todos los posibles estados o lugares donde podría encontrarse la partícula. Hay una serie de reglas matemáticas que se pueden aplicar a la función de onda con el fin de hallar la probabilidad de que cualquier medición concreta encuentre al electrón en una posición determinada.

Esto no garantiza que el electrón vaya a ocupar esa posición en algún momento. Pero realizando repetidas veces la misma medida y reiniciando el sistema cada vez, la distribución de los resultados concordará con las predicciones de la ecuación de Schrödinger. Las pautas repetidas y predecibles del mundo clásico son en último término el resultado de muchos procesos impredecibles.

Las repercusiones son interesantes. Digamos que queremos pasar a través de una pared; las matemáticas de la teoría cuántica dicen que es posible. Cada uno de nuestros átomos, al interaccionar, ocupa una posición que podría estar, por azar, al otro lado de la pared. La probabilidad de ese suceso es extremadamente baja, y la probabilidad de que todos nuestros átomos estén simultáneamente al otro lado de la pared es infinitesimal. Una dolorosa magulladura es la suma de todas las demás probabilidades. Bienvenidos a la realidad.

¿Qué probabilidad es la correcta?

La aleatoriedad cuántica plantea otros rompecabezas. La idea de que es posible llegar a una visión objetiva y universalmente válida del mundo haciendo medidas controladas de manera adecuada es quizás el supuesto más fundamental de la ciencia moderna. Funciona muy bien en el mundo macroscópico, el mundo clásico. Damos una patada a un balón y las leyes del movimiento de Newton nos dicen dónde estará en un momento posterior, independientemente de quién lo esté contemplando y cómo lo esté haciendo.

Pero demos una patada a una partícula cuántica, como un electrón o un quark, y la certidumbre se desvanece. En el mejor de los casos, la teoría cuántica nos permite calcular la probabilidad de un resultado de entre los muchos codificados en la multifacética función de onda que describe el estado de la partícula. Otro observador que hiciese idéntica medición con una partícula idéntica podría medir algo muy diferente. No hay ninguna manera de decir a ciencia cierta lo que va a ocurrir.

Así que esta es la cuestión: ¿en qué estado se encuentra un objeto cuántico cuando nadie lo está mirando? La respuesta que goza de más aceptación viene en la forma de la interpretación de Copenhague, llamada así por la ciudad donde estaba la escuela de los primeros teóricos cuánticos alrededor del pionero Niels

Bohr. El célebre gato de Schrödinger, creado en un experimento mental por el físico austriaco Erwin Schrödinger en 1935, ilustra su conclusión. Encerrado en una caja con una ampolla de gas letal que puede haber sido o no liberado por un suceso cuántico aleatorio (como puede ser una desintegración radiactiva), el desafortunado felino flota en el limbo, tanto vivo como muerto. Es solamente al abrir la caja un observador cuando la función de onda «colapsa» desde sus múltiples posibles estados a un único estado real.

Esto abre una caja de Pandora física y filosófica. Einstein formuló atinadamente la pregunta de si las observaciones de un ratón serían suficientes para colapsar una función de onda. Si no es así, ¿qué tiene de especial la conciencia humana? Si nuestras mediciones afectan verdaderamente a la realidad, esto abre también la puerta a efectos como la «fantasmagórica acción a distancia», la expresión despectiva de Einstein para describir cómo la observación de una función de onda puede aparentemente colapsar simultáneamente otra función de onda en la punta opuesta del universo.

Después está el misterio de cómo los átomos y las partículas pueden aparentemente adoptar una doble personalidad, mientras que los objetos macroscópicos como los gatos claramente no, a pesar de estar hechos de los mismos átomos y partículas. La intención de Schrödinger al introducir su gato era poner de manifiesto esa inexplicable escisión entre el mundo cuántico y el clásico. La escisión no solo es que esté ahí, es que además es «movible», como la describió el teórico cuántico John Bell: por ejemplo, los físicos se las arreglan para poner objetos cada vez más grandes en estados cuánticos difusos, de modo que no tenemos ninguna forma clara de definir dónde está la frontera.

La interpretación de Copenhague simplemente ignora estos misterios cuánticos, diciendo que deberíamos limitarnos a aceptar que la matemática funciona y asunto acabado. En 1989 el físico David Mermin, de la Universidad Cornell, puso a este enfoque el mote de «calcula y calla», expresión que hizo fortuna entre los detractores.

Existen interpretaciones físicas alternativas. Una de las más destacadas es la interpretación de los muchos mundos, que sugiere que el universo se divide en senderos diferentes cada vez que se observa algo. Pero ninguna de esas interpretaciones parece desentrañar el misterio central.

Una posibilidad que algunos físicos (entre ellos, Mermin) han comenzado a abrazar recientemente es que el misterio resida realmente en las matemáticas, en nuestra interpretación de las probabilidades de la función de onda que parecen gobernar el mundo cuántico. La idea se conoce como bayesianismo cuántico, por una de las dos principales tendencias de pensamiento en la teoría de la probabilidad (véase el capítulo 6). Convencionalmente, las probabilidades cuánticas se consideran como probabilidades frecuentistas. De la misma manera que podemos contar el resultado (cara o cruz) de muchos lanzamientos de una moneda para concluir que las probabilidades son 50/50, muchas medidas de un sistema cuántico nos revelan la frecuencia relativa de sus múltiples estados.

A pesar de sus limitaciones (entre ellas la que surge al tratar con sucesos únicos, aislados), la probabilidad frecuentista goza de favor en la ciencia por la manera en que convierte al observador en una máquina de contar completamente objetiva. La probabilidad bayesiana, por otro lado, nos permite adquirir un nuevo elemento de información y actualizar nuestra estimación de la probabilidad de que algo ocurra (véase la figura 9.3).

El argumento central del bayesianismo cuántico, o QBism, es que este tipo más subjetivo de probabilidad es aplicable al mundo cuántico. Por ejemplo, medimos la posición de un electrón invisible y adquirimos nuevo conocimiento, y de acuerdo con ello actualizamos nuestra estimación de las probabilidades, de incierto a cierto. Nada necesita haber cambiado en el nivel cuántico. Los estados cuánticos, las funciones de onda y el resto del aparato probabilístico de la mecánica cuántica no representan verdades objetivas sobre cosas del mundo real. Son más bien herramientas subjetivas que utilizamos para organizar nuestra incertidumbre en torno a una medida antes de realizarla. En otras palabras, la extrañeza cuántica está toda ella en la mente.

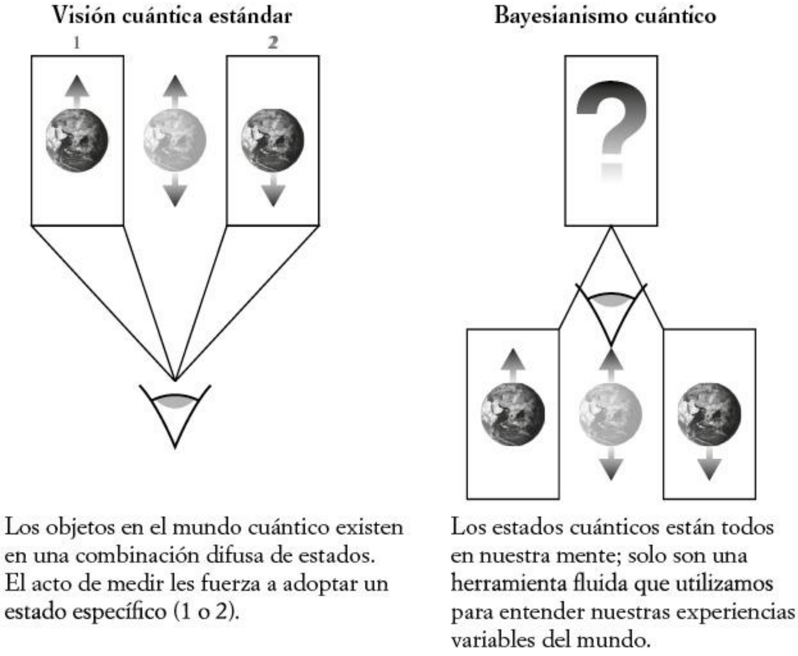


Figura 9.3 El bayesianismo cuántico es una alternativa a la visión estándar del mundo cuántico. Utiliza la estadística bayesiana para decir que su aparente incertidumbre está toda ella en nuestra mente.

Para Mermin, la belleza de esta idea es que las paradojas que afligen a la mecánica cuántica simplemente se desvanecen. Las medidas no son la «causa» de que las cosas ocurran en el mundo real, sea lo que sea el mundo real; son la causa de que las cosas ocurran en nuestra cabeza. La fantasmagórica acción a distancia es también una ilusión. La apariencia de un cambio espontáneo es solo el resultado de dos partes que realizan independientemente mediciones que actualizan su estado de conocimiento.

En cuanto a la movible escisión de John Bell, el mundo «clásico» es donde los actos de medir son continuos, porque vemos las cosas con nuestros propios ojos. En cambio, en el mundo «cuántico» microscópico necesitamos un acto de medir explícito con un aparato adecuado para obtener información. En este caso, para predecir resultados necesitamos una teoría que sea capaz de tener en cuenta todas las cosas que pueden pasar mientras no estamos mirando. Para un QBista, la frontera entre lo cuántico y lo clásico es la separación entre lo que está ocurriendo en el mundo real y nuestra experiencia subjetiva de ello.

Pero ¿resuelve esto realmente algún misterio? Los detractores del QBism dicen que este depende de la idea de que no hay ninguna experiencia directa de las cosas, sino solamente lo que construimos en la mente a partir de los inputs sensoriales. Imaginemos, por ejemplo, que montamos un aparato para medir la energía de una partícula y que luego nos vamos a tomar un té. Durante esa pausa, la aguja del dial del aparato ¿no tenía ninguna orientación definida? Un QBista diría que quizás no, que no podemos saberlo, aunque la experiencia nos dice que un objeto macroscópico como una aguja tiene siempre una orientación concreta.

Hay muchos físicos que no están del todo contentos con este resultado. Carlo Rovelli, de la Universidad de Aix-Marseille en Francia, dice que preferiría una interpretación de la teoría cuántica que tuviera sentido aun en ausencia de humanos que observen las cosas. Caslav Brukner, de la Universidad de Viena (Austria), ve una limitación en el hecho de que el QBism no parece ser capaz de explicar por qué la teoría cuántica tiene la estructura matemática y conceptual que tiene. Interpretemos como interpretemos esa construcción matemática particular, sigue siendo un misterio por qué funciona a la hora de describir y predecir el resultado de experimentos de partículas.

¿Pueden las matemáticas revelar una teoría del todo?

Los dos grandes avances de la física en el siglo pasado deben mucho a las matemáticas. Aunque las matemáticas de la teoría cuántica nos dicen que la naturaleza es intrínsecamente difusa, también explican el comportamiento preciso y predecible de los átomos al emitir y absorber luz o al unirse para formar moléculas. Y también indicaron el camino hacia nuevos descubrimientos, lo que llevó al teórico británico Paul Dirac a formular una ecuación que condujo a la idea de la antimateria varios años antes del descubrimiento de esta en 1932.

El segundo gran avance fue la relatividad general de Einstein. Más de 200 años antes, Isaac Newton había demostrado que la fuerza que hace caer las manzanas es la misma que la gravedad que mantiene los planetas en sus órbitas. Las matemáticas de Newton son suficientemente buenas para lanzar cohetes al espacio y colocar sondas alrededor de un planeta, pero Einstein fue más lejos que Newton. Su teoría de la relatividad general era capaz de operar con velocidades muy grandes y una gravedad muy fuerte, ofreciendo una visión más profunda de la naturaleza de esta última.

Einstein no era un matemático de primera fila, y tuvo la suerte de que los conceptos geométricos que necesitaba para la relatividad general habían sido desarrollados ya por el matemático alemán Bernhard Riemann un siglo antes (véase el capítulo 7). Y los jóvenes teóricos cuánticos pudieron también utilizar unas matemáticas que ya estaban elaboradas. Los físicos actuales no tienen tanta suerte.

Actualmente, el gran reto de la física fundamental es imbricar la relatividad general con la mecánica cuántica en una «teoría del todo» unificada. La que goza de más favor, aunque en modo alguna es la única, es la teoría de cuerdas, cuyo núcleo es la idea de que las partículas que constituyen los átomos están todas ellas hechas de diminutos bucles, o cuerdas, que vibran en un espacio de 10 u 11 dimensiones.

La teoría de cuerdas, si es correcta, vindicaría la visión de Einstein y otros de que el mundo es en esencia una estructura geométrica. Pero utiliza unas matemáticas extremadamente complejas que ciertamente no están en los libros de texto, y por ahora sigue estando lejos de proporcionar respuestas convincentes. Hay debates muy enconados acerca de si la teoría de cuerdas es correcta, de si algún día será capaz de ser contrastada experimentalmente e incluso de si, para empezar, se trata siquiera de física (véase la figura 9.4).

Si no se logra avanzar, quizás sea porque, aun existiendo una teoría fundamental «verdadera», esa teoría es simplemente demasiado difícil para que la pueda entender el cerebro humano. Un pez puede que sea ligeramente consciente del medio en el que vive y en el que nada; pero desde luego no puede entender que el agua está compuesta de átomos de hidrógeno y oxígeno unidos entre sí. El espacio y el tiempo forman el medio en el que vivimos; podría ser que su microestructura fuese también demasiado compleja para nuestra capacidad matemática.

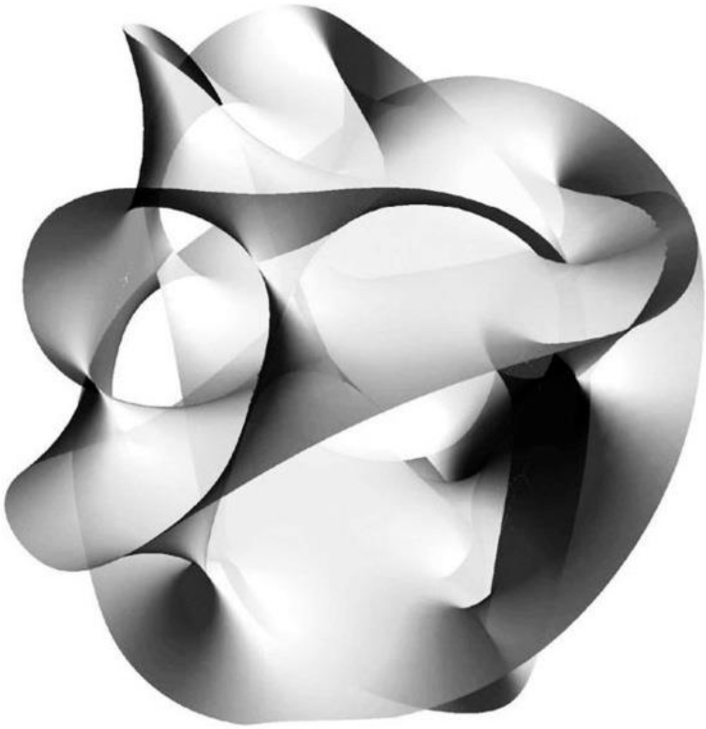


Figura 9.4 La teoría de cuerdas, nuestra mejor esperanza para una teoría del todo, utiliza dimensiones adicionales compactas, conformadas de acuerdo con una abstrusa geometría matemática conocida como un espacio de Calabi-Yau.

Y si, como parecen indicar muchas líneas de pensamiento en física, nuestro universo es solo uno dentro de un multiverso, podrían entonces hacerse relevantes otras ramas de las matemáticas. Necesitamos un lenguaje riguroso para describir la cantidad de posibles estados que podría poseer un universo y para comparar la probabilidad de las diferentes configuraciones. También haría falta un concepto más claro de infinito (véase el capítulo 3).

Una teoría unificada, siempre que pudiésemos entenderla, sería un triunfo intelectual. Sin embargo, llamarla «teoría del todo» induce a error. La teoría de cuerdas unifica lo muy grande y lo muy pequeño, pero hay una tercera frontera: lo muy complejo.

Reglas de base sencillas pueden también gobernar fenómenos aparentemente complejos. Esto fue insinuado en 1970 por el matemático John Conway, con la invención del «juego de la vida». Conway quería diseñar un juego que comenzara con una configuración sencilla y utilizara reglas elementales para hacerlo evolucionar una y otra vez. Empezó experimentando con las fichas blancas y negras en un tablero de go y descubrió que, adaptando las sencillas reglas de este juego (que determinan cuándo una ficha se convierte de blanca en negra y viceversa, así como las configuraciones iniciales), algunas posiciones producen resultados increíblemente complejos a partir aparentemente de la nada. A veces emergen configuraciones que parecen tener vida propia al moverse por todo el tablero.

El mundo real es parecido: reglas sencillas pueden dar lugar a consecuencias complejas. Explorar esas consecuencias tiene que ver no tanto con mejores teorías y matemáticas más complejas como con mejores formas de utilizar las matemáticas que ya tenemos.

Conway solo necesitó papel y lápiz para diseñar el juego, pero hace falta un ordenador para explorar a fondo toda su complejidad. Una mayor potencia de cálculo y la capacidad de aprendizaje de las máquinas significan que estamos en un punto en que los ordenadores, operando con la lógica de las matemáticas existentes, pueden ser capaces de resolver problemas hasta ahora inasequibles: superconductores de alta temperatura, o cómo las combinaciones de genes codifican la intrincada química de la célula. Aun así, es probable que lo que nos pueden decir tenga un límite.

Los límites de la computación

Si fuésemos capaces de simular matemáticamente los movimientos finos de la materia del universo, podríamos estar en condiciones de predecir su evolución y su destino. Solo hay una pega: con la potencia de cálculo actual, haría falta más tiempo que el que nos puede ofrecer el universo. La potencia de cálculo es una limitación práctica a la que podemos echar la culpa de todo, desde la falta de fiabilidad de los pronósticos del tiempo hasta las chapuzas en la logística. Como ya vimos en los capítulos 7 y 8, la dificultad para resolver problemas como el de optimizar un itinerario se hace rápidamente excesiva cuando el número de destinos sobrepasa varios millares.

Pero, en último término, echar la culpa a los ordenadores no es más que una cortina de humo para una limitación enorme. Por muy potentes que los hagamos, los ordenadores dependen del input humano para programarlos, y el pensamiento humano es un desastre. Enunciados como «este enunciado es falso», o acciones como odiar a alguien y sin embargo amarlo, son tanto computables como no computables. «El lenguaje es una expresión de la mente, y mi mente y mi lenguaje están llenos de contradicciones», dice Noson Yanofsky, científico de la información en la City University de Nueva York.

La lógica, y las matemáticas basadas en ella, son supuestamente la solución: un lenguaje más limpio y neutro para que un cerebro entrenado describa en términos abstractos lo que no puede visualizar. Todo eso está muy bien, pero luego vienen las limitaciones lógicas de las propias matemáticas. Estas limitaciones comienzan con preceptos bien conocidos como el de nunca dividir un número por cero (véase el capítulo 2). Si las matemáticas son el lenguaje de un universo impecable, no podemos permitir las incoherencias lógicas que resultan de dar ese paso; así que no lo hacemos. «Si uno quiere que las matemáticas continúen sin contradicciones, entonces tiene de algún modo que contenerse», dice Yanofsky.

Y como demostró Kurt Gödel con sus teoremas de incompletitud en los años treinta (véase el capítulo 3), todo sistema de lógica que contenga las reglas de la aritmética contendrá enunciados que no se pueden ni probar ni refutar. La incompletitud de Gödel es una expresión matemática del enunciado lógico-ilógico «este enunciado es falso». De hecho, no hay manera de que algo –sea un simple enunciado, un sistema de lógica o un ser humano– exprese toda la verdad sobre sí mismo.

Este problema de la autorreferencia es endémico. Alan Turing, contemporáneo de Gödel, demostró que no se puede preguntar de antemano a un programa de ordenador si va a funcionar bien. La mecánica cuántica rebosa de paradojas porque formamos parte del universo que estamos tratando de medir. E independientemente de que las matemáticas se inventen o se descubran, de que sean todo lo que hay o solamente una herramienta para explicar el mundo, la conclusión, frustrante pero estimulante, es que nunca las comprenderemos del todo, porque somos nosotros quienes estamos haciéndolas.

Conclusión

Al final de nuestro periplo por el mundo de los números, el matemático Ian Stewart resume lo que significa todo ello y dónde podría terminar nuestro viaje matemático.

¿Qué hace que las matemáticas sean especiales?

Platón, el filósofo griego, sostenía que los conceptos matemáticos existen realmente en una extraña clase de realidad ideal justo fuera del borde del universo. Un círculo no es solo una idea; es un ideal. Nosotros, criaturas imperfectas, podemos aspirar a ese ideal, pero nunca alcanzarlo, aunque solo sea porque los puntos trazados con un lápiz son demasiado gruesos para poder dibujarlo. Pero hay quienes dicen que las matemáticas solo existen en la mente del observador, que no tienen ninguna existencia independientemente del pensamiento humano, igual que ocurre con el lenguaje, la música o las reglas del fútbol.

¿Quién tiene razón? El punto de vista platónico es muy atractivo. Resulta tentador ver nuestro mundo cotidiano como una pálida sombra de otro más perfecto, ordenado, matemáticamente exacto. Las formas matemáticas asoman por doquier y tienen un toque de universalidad. El catálogo es también notablemente versátil: las mismas formas, pautas y patrones se utilizan de muchas maneras distintas. Las gotas de lluvia y los planetas son esféricos. Los arcoíris y las ondas en un estanque son circulares. Las configuraciones en forma de panal las utilizan las abejas para almacenar la miel pero se encuentran también en la distribución geográfica de los peces territoriales, el magma solidificado de la Calzada del Gigante en Irlanda del Norte y las pilas de rocas creadas por corrientes de convección en lagos poco profundos. La espiral se observa en el agua que sale por el desagüe de una bañera y en la galaxia de Andrómeda.

Con esta presencia ubicua de las mismas formas matemáticas no es extraño que los físicos se dejen llevar y declaren que dichas formas están en la base misma del espacio, el tiempo y la materia. El físico Eugene Wigner lo llamó la «irrazonable eficacia» de las matemáticas. Mucho antes que él, Platón dijo que «Dios siempre hace geometría». El físico James Jeans declaró que Dios era un matemático. Paul Dirac pensaba que Dios era un matemático puro. Y una corriente de pensamiento que prevalece hoy en la física sostiene que la realidad está hecha de información, la materia prima de las matemáticas.

Todo esto son ideas potentes, embriagadoras, altamente atractivas para los matemáticos. Pero es igual de concebible que todas esas matemáticas aparentemente fundamentales estén en el ojo del observador, o para ser más precisos, en su mente. Los seres humanos no experimentamos el universo en estado crudo, sino a través de nuestros sentidos, e interpretamos los resultados con ayuda de la mente. Por tanto, ¿hasta qué punto no estaremos seleccionando mentalmente tipos particulares de experiencia, considerándolos importantes, en lugar de escoger cosas que realmente son importantes en el funcionamiento del universo?

La respuesta, pienso yo, es un poco ambas cosas. Cuando estamos tratando de formalizar una idea difícil de aprehender o de hallar un nuevo método, la sensación es de inventar: damos vueltas de acá para allá, ensayando toda clase de ideas, sin saber a dónde nos va a llevar todo ello. En cambio, cuanto más asentada está un área de las matemáticas, más fuerte es la sensación de que existe una especie de paisaje lógico fijo que simplemente estamos explorando. Una vez sentados algunos supuestos en forma de axiomas, todo lo que se sigue de ellos está predeterminado.

Ahora bien, si las matemáticas residen sencillamente en la cabeza de los matemáticos, ¿por qué son tan «irrazonablemente eficaces»? La respuesta fácil es que la mayor parte de las matemáticas comienzan en el mundo real. Por ejemplo, después de observar en innumerables ocasiones que dos ovejas más otras dos ovejas hacen cuatro ovejas, y lo mismo para las vacas, los lobos, las verrugas y las brujas, hay un paso muy pequeño hasta la idea de que 2 + 2 son igual a 4 en un sentido universal, abstracto. Como la abstracción salió de la realidad, no es sorprendente que sea aplicable a la realidad.

Pero esta visión es demasiado simplista. Las matemáticas tienen una estructura interna de deducción lógica que les permite crecer de maneras inesperadas. Generar nuevas ideas también se puede hacer internamente, como cuando alguien intenta llenar lagunas evidentes en el paisaje lógico. Por ejemplo, habiendo hallado cómo resolver ecuaciones cuadráticas (ecuaciones que tienen cantidades al cuadrado, que aparecen en todo tipo de situaciones prácticas) es obvio que se debería tratar de resolver también ecuaciones cúbicas, cuárticas y quínticas. Antes de acabar de decir «Evariste Galois», estamos ya haciendo la teoría de Galois, que demuestra que las quínticas son en general irresolubles, aunque es algo casi totalmente inútil a todos los efectos prácticos. Luego viene alguien y generaliza la teoría de Galois para poder aplicarla a ecuaciones diferenciales, y de pronto encontramos de nuevo aplicaciones, en un área completamente diferente.

Sí, existe un flujo de problemas y conceptos del mundo real hacia las matemáticas, y un reflujo de soluciones de las matemáticas hacia la realidad. Wigner señala que el reflujo puede que no resuelva el problema que nos propusimos solucionar. ¿Por qué? Porque las matemáticas son el arte de extraer conclusiones necesarias independientemente de las interpretaciones. Dos más dos tienen que ser cuatro, independientemente de que estemos hablando de ovejas, vacas o brujas. En otras palabras, la misma estructura abstracta puede tener varias interpretaciones. Se pueden obtener las ideas de una de las interpretaciones y transferir el resultado a otras. Las matemáticas son tan potentes porque son una abstracción.

Todo eso está muy bien, pero ¿por qué las abstracciones de las matemáticas se corresponden con la realidad? De hecho, ¿se corresponden realmente o es todo una ilusión? La ciencia, a diferencia de las matemáticas, tiene la posibilidad de un control externo por parte de la realidad: las teorías tienen que concordar con las observaciones. Si todos los científicos del mundo se reunieran y decidieran que los elefantes son ingrávidos y ascienden en el aire si no se les sujeta con sogas, seguiría siendo insensato quedarse abajo en un acantilado mientras una manada de elefantes salta desde arriba al vacío. El contraste con la realidad no puede ser perfecto porque lo llevan a cabo seres que ven la realidad a través de sentidos imperfectos y sesgados, pero la ciencia sigue teniendo que superar un escrutinio muy estricto.

¿Cuál es el contraste con la realidad en matemáticas? Cuanto más ahondamos en la naturaleza «fundamental» del universo, tanto más matemática parece volverse. El fantasmagórico mundo de lo cuántico no se puede expresar sin matemáticas (véase el capítulo 9): si intentamos describirlo en lenguaje cotidiano, no tiene sentido. Naturalmente, no todos los campos son tan claramente matemáticos en su estructura. El mundo biológico, en particular, no parece obedecer las rígidas reglas que encontramos en la física. La «ley de Harvard del comportamiento animal» –que dice que en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas los animales hacen lo que les da la gana– es ahí más adecuada que las leyes del movimiento de Newton.

Pero el problema podría ser una diferencia de escala. La física cuántica suele aplicarse a configuraciones de materia sencillas: por ejemplo, unos cuantos átomos. En biología, las configuraciones de materia significativas son enormemente más complejas: en el genoma humano hay billones de átomos, y es solo una hebra de ADN dentro de una célula de un organismo mucho más complejo. Una descripción átomo por átomo de un ser humano implicaría números con una cantidad descomunal de ceros. Puede ser que los seres humanos se comporten de acuerdo con reglas matemáticas, pero son unas matemáticas tan complicadas que los matemáticos humanos no pueden en modo alguno ponerlas negro sobre blanco, y mucho menos entender su significado. Además, son matemáticas cuya estructura es casi totalmente impenetrable, por la anodina razón de que hay demasiada información que introducir.

Es el viejo problema filosófico de la «emergencia», pero en un nuevo disfraz. Los fenómenos emergentes son cosas que parecen transcender sus ingredientes, como la conciencia que surge en un cerebro material. Nuestro comportamiento está causado por reglas matemáticas aplicadas a nuestros átomos constitutivos, en el contexto de todo cuanto está aconteciendo a nuestro alrededor, pero no podemos hacer los cálculos para comprobarlo porque son demasiado complicados y demasiado largos.

Cabría argüir que todo esto convierte el problema en una cuestión académica: da igual que este tipo de base matemática exista o no para la biología, porque, aun en el caso de que existiera, no sirve de nada en la práctica. Sin embargo, existe una alternativa atractiva. Incluso sistemas matemáticos muy complejos tienden a generar patrones reconocibles en niveles de descripción superiores. Por ejemplo, la teoría cuántica que subyace en un cristal implica un número de átomos parecido al de un ser humano –al menos para un cristal del tamaño de un ser humano– y por tanto tropieza con el mismo problema intratable de la emergencia.

Pero los cristales exhiben sus propios y claros patrones matemáticos, como por ejemplo una forma geométrica regular, y aunque nadie puede deducirlo con pleno rigor lógico a partir de la mecánica cuántica de sus átomos, existe una cadena de razonamiento que hace plausible que las leyes de la mecánica cuántica conducen realmente a las regularidades de la estructura cristalina.

El razonamiento sería más o menos así: la mecánica cuántica hace que los átomos se ordenen en una configuración de mínima energía; la simetría general de las leyes de la naturaleza en el espacio y el tiempo hace que tales configuraciones sean altamente simétricas; en este caso, la consecuencia es que forman redes atómicas regulares.

Desde este punto de vista, los patrones matemáticos que surgen en las descripciones de alto nivel de organismos vivos prueban que también la biología es en el fondo matemática. Un ejemplo podría ser la aparición de los números de Fibonacci en los pétalos de las flores (véase el capítulo 5).

Pero los patrones como este ¿nos dicen realmente que las matemáticas son inherentes a la naturaleza? La mente tiende sin duda a buscar patrones matemáticos, sean o no significativos. Esta tendencia condujo a la ley de la gravedad de Newton y a las ecuaciones de la mecánica cuántica, y también a la astrología y a la obsesión con las mediciones de la Gran Pirámide. Irónicamente, lo que las matemáticas nos dicen sobre la elección de números de lotería es que cualquier patrón que creamos ver es ilusorio (véase el capítulo 8).

Merece la pena preguntarse cómo desarrolló nuestra mente esa tendencia a la búsqueda de patrones. La mente humana evolucionó en el mundo real y aprendió a detectar patrones que nos ayudaban a sobrevivir frente a las vicisitudes externas. Si ninguno de los patrones detectados por esas mentes guardara ninguna auténtica relación con el mundo real externo, no habrían ayudado a sus propietarios a sobrevivir y habríamos acabado por extinguirnos. De manera que nuestras ficciones tienen que corresponderse, hasta cierto punto, con patrones reales.

Análogamente, las matemáticas son nuestra forma de comprender ciertas características de la naturaleza. Es un constructo de la mente humana, pero somos parte de la naturaleza, estamos hechos de la misma clase de materia y existimos en las mismas clases de espacio y tiempo que el resto del universo. Así que las ficciones dentro de nuestras cabezas no son invenciones arbitrarias. Existen sin lugar a duda algunas cosas matemáticas en el universo; la más evidente de ellas: la mente de un matemático. Las mentes matemáticas no pueden evolucionar en un universo no matemático.

Pero eso no quiere decir que solo sea posible una única clase de matemáticas: las matemáticas del universo. Esa visión parece un poco provinciana. Los extraterrestres ¿encontrarían necesariamente el mismo tipo de matemáticas que nosotros? No me refiero a los detalles finos. Por ejemplo, las criaturas gatunas de seis patas de Apellobetnees Gamma utilizarían sin duda una notación de base 24, pero seguirían estando de acuerdo en que 25 es un cuadrado perfecto, aunque lo escribieran como 11.

Pienso más bien en el tipo de matemáticas que podrían desarrollar los magos del vórtice de plasma de Cygnus V, para quienes todo está en flujo constante. Apuesto a que entenderían la dinámica del plasma mucho mejor que nosotros, aunque sospecho que no tendríamos ni idea de cómo lo hacían. Pero dudo de que tuvieran nada parecido al teorema de Pitágoras. En los plasmas hay pocos ángulos rectos. De hecho, dudo de que tuvieran el concepto de «triángulo». Para cuando hubieran dibujado el tercer vértice de un triángulo rectángulo, los otros dos habrían desaparecido mucho antes, arrastrados por los vientos del plasma. De modo que quizá sea ese el motivo real de la irrazonable eficacia de las matemáticas: no es que existan en algún reino platónico; es que inventamos, o descubrimos, las matemáticas que se ajustan a la realidad que nos rodea.

Cuarenta y nueve ideas

En esta sección se ofrecen 7^2 ideas suplementarias para explorar con mayor profundidad el mundo de los números.

Siete lugares de peregrinaje matemático

1. ***El Museo Nacional de Matemáticas en Nueva York***, situado en East 26th Street entre la Quinta Avenida y la Avenida Madison, se presenta como el único museo dedicado a las matemáticas en América del Norte. Entre los objetos expuestos figura un triciclo de ruedas cuadradas que rueda suavemente sobre una superficie de diseño especial.

2. ***La Galería Winton en el Museo de Ciencias de Londres***, que abrió en 2016, está dedicada a las matemáticas. Su techo ondulante, proyectado por la famosa arquitecta Zaha Hadid, representa las ecuaciones matemáticas que describen el flujo de aire.

3. ***Los siete puentes de Königsberg.*** Solo uno de ellos sigue en pie. La mayor parte de la ciudad, hoy el enclave ruso de Kaliningrado, emparedado entre Lituania y Polonia en el mar Báltico, fue destruida durante la Segunda Guerra Mundial. La demostración de Leonhard Euler de que no puedes cruzar los siete puentes una sola vez sin retroceder se considera generalmente como la fundación de la disciplina de la teoría de grafos. Se dice que con la actual configuración de los puentes sí es posible: quizás merezca la pena darse una vuelta por el Báltico para comprobarlo.

4. ***La antigua ciudad de Siracusa en Sicilia, Italia,*** es patrimonio de la Humanidad y merecedora de una visita. Para los forofos de las matemáticas, fue el escenario del apócrifo ¡Eureka! de Arquímedes cuando dio con la ley matemática del desplazamiento en la bañera. También apócrifa es la historia de que Arquímedes encontró su fin cuando un soldado romano, del ejército que acababa de saquear Siracusa, se cruzó con él mientras estaba dibujando diagramas en la arena y, contra las órdenes de su general, le acuchilló.

5. ***El puente de Broom, en el Royal Canal en los suburbios del norte de Dublín***, tiene una placa con la ecuación para los números complejos en cuatro dimensiones, o cuaterniones, que conmemora el lugar donde el matemático William Rowan Hamilton tuvo la inspiración para crearlos.

6. ***Los azulejos de la Alhambra en Granada, España***, muestran patrones periódicos complejos; de hecho, contienen ejemplos de 13 de las 17 clases de simetría periódica. Para los aficionados a menos regularidad, la terraza en el exterior del edificio Andrew Wiles del Instituto Matemático en Oxford, Reino Unido, está pavimentada con un teselado de Penrose aperiódico.

7. ***Gotinga, Alemania,*** fue el lugar más importante en el desarrollo de las matemáticas modernas. En la actualidad no hay nada allí de especial interés matemático, pero en el siglo **XIX** y principios del **XX** fue la casa de unos cuantos matemáticos seminales, entre ellos Carl Friedrich Gauss, David Hilbert, Emmy Noether y Bernhard Riemann.

Siete enteros peculiares

1. ***1:*** A diferencia del 0, el 1 puede que sea indiscutiblemente un número, pero tiene propiedades que lo hacen distinto. Así como el 0 es la «identidad aditiva» (sumar 0 a algo no cambia nada), el 1 es la «identidad multiplicativa». Cualquier número multiplicado por 1 sigue siendo el mismo, incluido el propio 1. Se sigue que 1 es el único número que es igual a su cuadrado, su cubo, etc. Es también el único número natural que ni es primo (es solo divisible por 1, de manera que no cumple con la definición) ni es un número compuesto, resultado de multiplicar dos números naturales más pequeños.

2. ***6***: En los ***Elementos,*** su tratado de matemáticas, Euclides acuñó el término «número perfecto». Se refiere a un número que es la suma de todos sus divisores, excluido él mismo. El primer ejemplo es 6 = 1 + 2 + 3; los siguientes son 28, 496 y 8128.

3. ***70***: La peculiaridad de este número habla por sí sola: es el menor «número raro». Un número raro tiene dos propiedades: primero, es un número «abundante» o «excesivo», que quiere decir que la suma de todos sus divisores, incluido el 1 pero excluido él mismo, es mayor que él mismo; en el caso de 70, 1 + 2 + 5 + 7 + 10 + 14 + 35 = 74. Pero además los números raros no son «semiperfectos», es decir, no son iguales a la suma de algunos de sus divisores. Esta combinación es rara: después del 70, los siguientes ejemplos son 836 y 4030.

4. ***1729***: Este número se habría considerado poco notable de no haber sido por una anécdota relatada por el matemático G. H. Hardy sobre su amigo y pupilo Srinivasa Ramanujan, para ilustrar la peculiar brillantez de este último. Hardy escribió: «Recuerdo una vez que fui a verle estando él enfermo en Putney. Había ido yo en el taxi número 1729 y le dije que el número me parecía aburrido y que esperaba que no fuese un presagio poco favorable. «No –respondió–, es un número muy interesante; es el número más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos formas diferentes». Las dos formas son $1^3 + 12^3$ y $9^3 + 10^3$, y el 1729 se conoce desde entonces como el número de Hardy-Ramanujan.

5. ***3435***: Es un número de Münchhausen, uno de los dos que se conocen. Llamado así por el noble alemán barón de Münchhausen, conocido por sus fantásticas historias, 3435 se puede «elevar a sí mismo»: es la suma de sus dígitos elevados a su propia potencia. $3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5 = 27 + 256 + 27 + 3125 = 3435$. El otro número de Münchhausen es, naturalmente, el 1.

6. ***6174***: Tomemos cualquier número de cuatro dígitos de los cuales al menos dos sean diferentes. Ordenemos los dígitos en orden descendente y ascendente y restemos el segundo del primero. Repitamos el paso anterior con este nuevo número (considerando los posibles ceros como dígitos normales), hasta que el resultado de la substracción sea 6174. Como observó el matemático indio D. L. Kaprekar en 1955, esto ocurrirá en no más de siete pasos.

7. ***El número de Graham***: En los años setenta el matemático Ronald Graham estaba trabajando en un problema que tenía que ver con cubos en dimensiones superiores. Cuando llegó a la solución, el número que obtuvo no era infinito, pero era tan grande que no se podía escribir; literalmente no existe suficiente espacio en el universo. Lo cual quiere decir que no podemos reproducirlo aquí, aunque sabemos que el último dígito es 7.

Siete (aparentes) paradojas

1. ***La paradoja de la línea costera:*** ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? Esa fue la pregunta que formuló el matemático Benoit Mandelbrot en 1969, en un artículo con el subtítulo «Autosemejanza estadística y dimensión fraccionaria» en el que exploraba una aparente paradoja: el hecho de que la longitud de la línea costera de una isla como Gran Bretaña, con sus múltiples entrantes, curvas y complicaciones en todo tipo de escalas, depende de la longitud de la cosa que utilicemos para medirla. Cuanto más pequeña la regla de medir, mayor será la longitud, al tenerse en cuenta un mayor número de entrantes y salientes. Sin embargo, tiene una longitud fija, ¿no?

Para Mandelbrot, la respuesta es que una forma como una línea costera, con repetidas complicaciones en muchas escalas, no tiene sentido tratarla como si fuese una línea recta con longitud en una sola dimensión. Por otro lado, no cabe duda de que una línea costera no es tampoco una forma en dos dimensiones. Está entremedias: tiene la propiedad, contraria a la intuición, de tener una dimensión fraccionaria. Con la palabra que Mandelbrot introdujo en 1975 para describir tales patrones abrió toda una nueva avenida de descubrimiento matemático: los «fractales».

2*. **La paradoja de Zenón***: El movimiento es imposible y el cambio no existe. Esa es la lección de una serie de paradojas formuladas por el filósofo griego Zenón de Elea en el siglo **V** a. C. La más conocida es la de Aquiles y la tortuga. En un carrera, Aquiles da a la tortuga una ventaja de salida, digamos que 100 metros. Al cabo de un cierto tiempo, Aquiles ha corrido 100 metros y la tortuga 10, por lo cual esta sigue en cabeza. Pero en el tiempo que tarda Aquiles en recorrer esos 10 metros, la tortuga ha vuelto a avanzar. De hecho, se puede demostrar que, aunque Aquiles se acercará mucho a la tortuga, nunca llegará a adelantarla.

Hubo que esperar hasta finales del siglo XIX, con la aplicación de un poco de hábil cálculo infinitesimal y la plena comprensión de las matemáticas de la serie infinita que representa el problema, para lograr lo que parece una solución matemática irreprochable que se ajusta a la experiencia: sí, Aquiles puede adelantar a la tortuga.

3. ***La paradoja del montón:*** También conocida como la paradoja sorites, pone de manifiesto la importancia de utilizar términos precisos, definidos lógicamente, en cualquier argumento matemático. De un montón de granos de arena vamos retirando uno tras otro. Quitar un grano de arena cualquiera no convierte el montón en un no montón. Pero, por otro lado, un solo grano de arena no es un montón. Así, si seguimos quitando granos, ¿cuándo se convierte un montón en un no montón? Parece trivial, pero las soluciones suelen requerir, o bien fijar un límite numérico arbitrario para el tamaño del montón, negando que de entrada puedan existir montones, o bien introducir una nueva lógica trivalente que permita estados de montón, no montón y ni uno ni otro.

4. ***La paradoja del ascensor:*** El cosmólogo George Gamow tenía un despacho en la segunda planta, mientras que su colega Marvin Stern estaba en la sexta, cerca de la parte superior del edificio. Los dos observaron un hecho curioso: el primer ascensor que llegaba al piso de Gamow casi siempre bajaba, mientras que el primero en llegar al de Stern casi invariablemente subía, a pesar de que (a menos que en algún lado en el centro del edificio se estuviese originando un flujo continuo de ascensores) el número de ascensores que subían o bajaban debería ser el mismo en cada planta. Se trata, de hecho, de un efecto real, pero para explicar por qué es ese el caso se necesita una modelización compleja de dónde pasa un ascensor la mayor parte del tiempo en un edificio.

5. ***La paradoja de la amistad:*** Por término medio, la mayor parte de la gente tiene menos amigos que sus amigos. Lo que parece una paradoja es también un efecto real, y tiene que ver con la estructura de la clase de redes que abundan en nuestros círculos sociales. En pocas palabras, la gente con gran número de amigos tiene mayor probabilidad de estar en nuestro propio grupo de amigos, desequilibrando el promedio. Un efecto similar significa que, por término medio, los compañeros o compañeras de una persona han tenido un número mayor de otros compañeros o compañeras sexuales.

6. ***La paradoja de Simpson:*** En 1973 un análisis de las admisiones a la escuela de graduados de la Universidad de California en Berkeley mostró que las solicitudes de hombres tenían más probabilidades de ser aceptadas que las de mujeres. Pero cuando los encargados del análisis lo desglosaron por departamentos, había más departamentos con un sesgo significativo hacia las mujeres. Se trata de un ejemplo famoso de la paradoja de Simpson, en el que una tendencia observada en diferentes grupos de datos desaparece cuando se combinan dichos grupos. Es la maldición de muchas pruebas clínicas cuando los investigadores están intentando averiguar si el efecto de un medicamento es real en toda una población, por ejemplo. En el caso de la UC Berkeley resultó que el fenómeno era debido a que había más mujeres que solicitaban entrar en departamentos competitivos con tasas de admisión generalmente bajas, y no tanto a un sesgo de género generalizado.

7. ***La paradoja del cuerno de Gabriel***: Si tomamos la gráfica de una determinada función matemática ($f(x) = 1/x$ para el dominio $x > 1$) y la rotamos en tres dimensiones alrededor del eje x, es posible crear una forma de superficie infinita pero de volumen finito. La forma resultante, conocida como cuerno de Gabriel o trompeta de Torricelli, sería desconcertante en la práctica: por ejemplo, podría contener solo una cantidad finita de pintura, pero requerir una cantidad infinita de ella para pintar la superficie.

Siete grandes matemáticos menos conocidos

1. ***Muhamad ibn Musa al-Juarismi*** (***c.*** 780-***c.*** 850) fue un matemático persa cuyos escritos, una vez traducidos al latín, transformaron las matemáticas occidentales, introduciendo entre otras cosas el sistema numérico decimal. La palabra «álgebra» deriva de ***al-jabr***, una operación utilizada por al-Juarismi para resolver ecuaciones cuadráticas. La forma latinizada de su nombre, ***algoritmi,*** dio lugar a nuestro «algoritmo».

2. ***Gerolamo Cardano*** (1501-76) fue un matemático erudito que, entre otras cosas, utilizó por primera vez números imaginarios. Fue también un jugador compulsivo, lo que le llevó a escribir el primer estudio sistemático de la probabilidad.

3. ***Carl Friedrich Gauss*** (1777-1855) es uno de los matemáticos más influyentes de la historia, que hizo muy diversas contribuciones a campos desde la teoría de números a la estadística. Fue un perfeccionista obsesivo y muchos de sus resultados no se publicaron hasta después de su muerte. Hoy día se le conoce sobre todo por la distribución gaussiana o normal en estadística, que predice la manera en que una magnitud aleatoria (como la estatura de todos los matemáticos) se agrupa alrededor de su valor medio.

4. ***Evariste Galois*** (1811-32) fundó varias ramas del álgebra abstracta y puso los cimientos de la teoría de grupos. Fue un defensor radical de los ideales de la Revolución francesa, y murió en circunstancias misteriosas en un duelo a la edad de solo 20 años.

5. ***Emmy Noether*** (1882-1935) fue descrita por Albert Einstein como «el mayor genio matemático creativo producido hasta ahora desde que comenzó la educación superior de las mujeres». Otros sostienen que solo es necesaria la primera parte de la frase. El teorema que lleva su nombre (que las simetrías matemáticas se traducen en magnitudes físicas conservadas) ha proporcionado un mapa para hacer descubrimientos en la física fundamental. Se le denegó un puesto de profesora titular en Gotinga por ser mujer, y como judía murió en el exilio en Estados Unidos, víctima de las leyes raciales nazis.

6. ***John von Neumann*** (1903-57) recibe a menudo el título del último de los matemáticos universales. Hizo contribuciones seminales a la teoría de juegos y al desarrollo de la computación, y contribuyó también al desarrollo de la teoría cuántica y la bomba nuclear. Fue también famoso por su memoria fotográfica, y a veces entretenía a sus amigos recitando páginas de la guía telefónica y obras enteras de la literatura como ***Historia de dos ciudades.***

7. ***Paul Erdős*** (1913-96) fue un matemático, húngaro de nacimiento, conocido como «el excéntrico de los excéntricos». Llevó una vida itinerante viajando de conferencia en conferencia, rehuyendo la mayor parte de las posesiones y apareciendo en las casas de sus colegas con el anuncio de «Mi cerebro está abierto». Su estilo singularmente colaborador le llevó a ser coautor de más de 1500 artículos a lo largo de su vida, y también al concepto del número de Erdős como medida del estatuto de un matemático en ese campo. Si tienes un número de Erdős de cero, eres el propio Erdős; si es 1, has colaborado con él; si es 2, has colaborado con algún colaborador suyo, etc.

Siete chistes matemáticos… con siete explicaciones de tipo matemático

1. ¿Por qué cruzó la gallina la banda de Möbius?

Para llegar al mismo lado.
(Una banda de Möbius es una forma topológica con un solo lado.)

2. Dos estadísticos van de caza. El primero dispara contra un pájaro, pero el tiro le sale alto por un palmo. El segundo dispara y falla un palmo por abajo. Los dos se felicitan y dicen «¡Le dimos!».

(Es la ley de promedios…)

3. Escribe la expresión del volumen de una pizza de altura ***a*** y radio ***z***.

(La fórmula del volumen es π·(radio)^2·(altura). En este caso, p·i·z·z·a.)

4. En una fiesta matemática, va pi y le dice a e^x, que está apartado en un rincón: «Y tú, ¿no te integras?» Y contesta e^x: «Me da igual».

(La integral de e^x es otra vez e^x.)

5. Un físico, un biólogo y un matemático están sentados en un banco enfrente de una casa. Ven que primero entran dos personas en la casa y que un poco más tarde salen tres. El físico dice: «La medida inicial era incorrecta». El biólogo añade: «Han debido de reproducirse». Y el matemático comenta: «Si ahora entra exactamente una persona en esa casa, estará vacía».

(Solo un matemático cuenta verdaderamente con números negativos.)

6. Infinitos matemáticos entran en un bar. El primero dice: «Yo tomo una cerveza». El segundo dice: «Yo media». El tercero dice: «Yo un cuarto». El camarero sirve solo dos cervezas. «Pero bueno, ¿eso es todo lo que nos va a dar?», preguntan los matemáticos. Y el camarero contesta: «Vamos, caballeros, ¡conozcan sus límites!».

(Se demuestra matemáticamente que el límite de la suma de los infinitos términos de la serie $1/2^n$, es decir, 1 + 1/2 + 1/4 …, es igual a 2.)

7. ¿Qué es un oso polar?

Un oso cartesiano después de una transformación de coordenadas.

(Las coordenadas cartesianas y las polares son dos sistemas de coordenadas alternativos).

Siete películas de matemáticas

1. ***Good Will Hunting*** (1997) [***El indomable Will Hunting***] es la historia imaginaria de Will Hunting, un conserje del MIT dotado de una capacidad matemática del nivel de un genio, pero que, para prosperar, tiene que superar primero sus demonios.

2. π (1998) [***Pi, fe en el caos***] es un thriller de terror cuyo protagonista, un teórico de números, ve patrones matemáticos en todo lo que le rodea, con resultados no muy agradables.

3. ***A Beautiful Mind*** (2001) [***Una mente maravillosa***] es un drama biográfico de la vida de John Nash (1928-2015), matemático estadounidense y pionero de la teoría de juegos, que obtuvo el Premio Abel y el Premio Nobel de Economía a pesar de padecer esquizofrenia paranoide.

4. ***Proof*** (2005) [***La prueba***] es una historia imaginaria basada en una obra de teatro que obtuvo el premio Pulitzer. Gira alrededor de una disputa sobre la propiedad de una demostración descubierta entre los papeles de un matemático después de fallecer. Timothy Gowers, matemático de Cambridge y Medalla Fields, trabajó de asesor en la película.

5. ***Travelling Salesman*** (2012) es un thriller intelectual basado en cuatro matemáticos que descubren una solución al célebre problema P = NP de la complejidad computacional (véase el capítulo 7) y las consecuencias morales de su descubrimiento.

6. ***The Imitation Game*** (2014) [***Descifrando Enigma***] es un drama histórico centrado en Alan Turing y otros matemáticos que descifraron los códigos nazis de Enigma durante la Segunda Guerra Mundial.

7. ***The Man Who Knew Infinity*** (2015) [***El hombre que conocía el infinito***] cuenta la historia real del genio matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920) y su notable colaboración con el matemático británico G. H. Hardy.

Siete ideas de lecturas suplementarias

1. La serie ***Very Short Introductions*** publicada por Oxford University Press son libros breves escritos por expertos para legos en la materia. Incluye títulos de matemáticas, álgebra, números, infinito, probabilidad, estadística y lógica, entre otros.

2. «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences» es un ensayo seminal escrito en 1960 por el físico Eugene Wigner. Está accesible en http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/wigner.pdf

3. ***Mathematics Made Difficult,*** de Carl E. Linderholm (1971), es un libro para quienes aprecian el lado perverso de las matemáticas. Consiste en demostraciones matemáticas de enunciados evidentes, pero hechas lo más complicadas posible.

4. «100,000 digits of π». Si lo que se busca son pautas en los dígitos de π, en el sitio http://www.geom.uiuc.edu/~huberty/math5337/groupe/digits.html se da una lista de los 100 000 primeros.

5. «The largest known primes – a summary» detalla los números primos más grandes conocidos y la búsqueda en pos de ellos. El sitio es http://primes.utm.edu/largest.html

6. Wolfram MathWorld es un extenso recurso online de matemáticas que proporciona definiciones y contextos para muchos conceptos matemáticos. http://mathworld.wolfram.com/

7. El sitio web de ***New Scientist*** tiene un extenso archivo de artículos, regularmente actualizado, sobre toda clase de temas matemáticos y científicos. www.newscientist.com

Glosario

Números complejos: Cualquier número que tenga una componente real y otra imaginaria.

Números enteros: Los números naturales más sus opuestos negativos, -1, -2, -3, -4, -5, … Los conjuntos de los números naturales y los números enteros son ambos infinitos numerables.

Números imaginarios: Un número real multiplicado por la unidad imaginaria i, la raíz cuadrada de -1.

Números irracionales: Números que no se pueden expresar como fracción de dos enteros, por muy grandes que sean. Los números irracionales, como π, el número de Euler e y la raíz cuadrada de 2 no se pueden escribir nunca completos: tienen un número infinito de decimales sin ningún periodo que se repita.

Números naturales: Los números que sirven para contar: 1, 2, 3, 4, 5 …, generalmente incluido también el 0.

Números primos: El subconjunto de los números naturales mayores que 1 y solo divisibles por 1 y por sí mismos. El conjunto de los números primos también es infinito numerable.

Números racionales: Los números que se pueden expresar como fracción de dos enteros, por ejemplo 1/3,–3/14.

Números reales: Los números enteros más todos los racionales e irracionales que hay entremedias, formando una recta numérica continua. El conjunto de los números reales forma el infinito del continuo, que es mayor que el infinito numerable.

Números transcendentes: El subconjunto de los números irracionales que no se pueden convertir en un número entero por ninguna operación matemática, como por ejemplo multiplicándolo por sí mismo, elevándolo a una potencia. π y e son los ejemplos más conocidos.

Créditos de las figuras

Todas las imágenes © *New Scientist,* excepto las siguientes:

Figura 1.1 Folger Shakespeare Library Digital Image Collection
Figura 2.2 Universal History Archive/Universal Images Group/REX/Shutterstock
Figura 4.2 John D. & Catherine T. MacArthur Foundation
Figura 5.1 Mint images/REX/Shutterstock
Figura 7.1 Artem Panteleev/Interpress/TASS
Figura 7.4 AZ Goriely
Figura 8.3 Joel Haddley
Figura 8.4 Por cortesía de Urban Redevelopment Authority, Singapore
Figura 8.5 Elkanah Tisdale/Boston Centinel, 1812
Figura 9.1 F. Schmutzer, restauración por Adam Cuerden/Biblioteca Nacional Austriaca
Figura 9.2 REX/Shutterstock
Figura 9.4 Jbourjai–Mathematica output, creado por el autor, dominio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5249718

Título original: *How Numbers Work. Discover the strange and beautiful world of mathematics*
Publicado por primera vez en Gran Bretaña por John Murray Learning.

Traducción de Miguel Paredes Larrucea

Edición en formato digital: 2023

Calle Valentín Beato, 21
28037 Madrid
www.alianzaeditorial.es

ISBN ebook: 978-84-114-8385-8