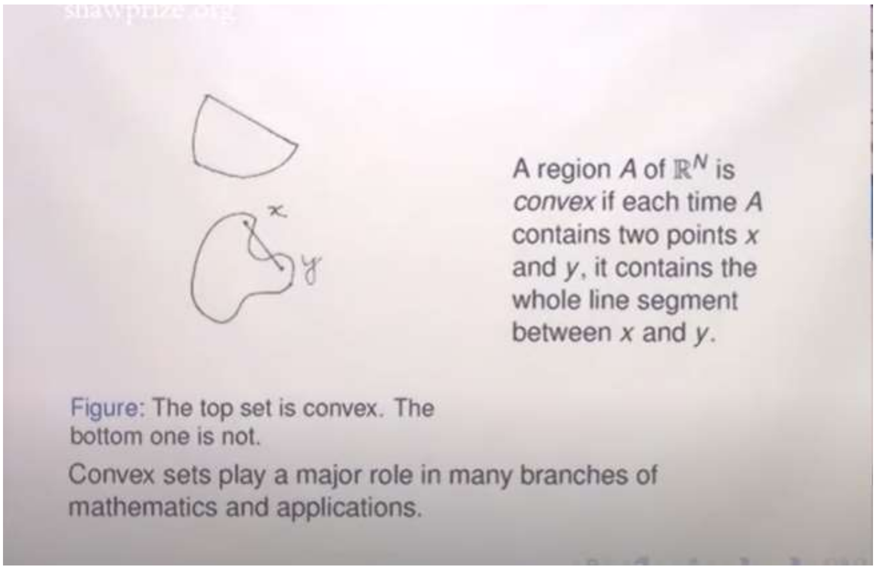
CONFERENCIA 2019 MICHEL TALAGRAND

CONVEXOS (PARA SECUNDARIA)

Transcripción del minuto 32 al 52 en

https://www.youtube.com/watch?v=B_Cmzc5I8ro



Entre dos puntos en una región, la región superior aquí es convexa, pero la región en la parte inferior no lo es, porque si tomo el punto X aquí y el punto Y allá, el segmento de línea entre ellos sale de la región.

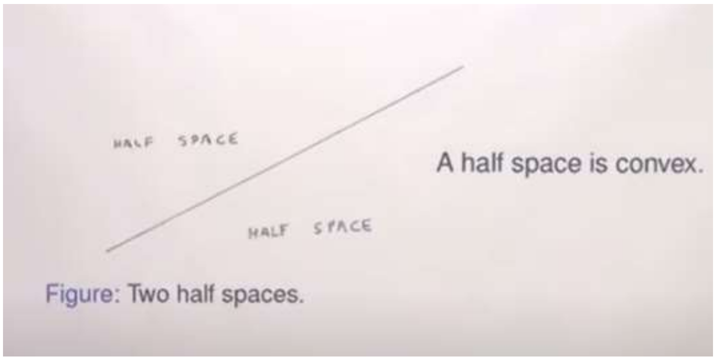
Por lo tanto, esta región no es convexa.

Por supuesto, las regiones que son convexas son mucho más simples que las regiones generales que pueden ser complicadas.

Los conjuntos convexos son un concepto fundamental en matemáticas y juegan un papel mayor en muchas ramas y en aplicaciones; constantemente uno se enfrenta a ellos.

Así que en cierto sentido, estos conjuntos son fundamentales.

Ahora voy a dar un ejemplo simple de un conjunto convexo.



Un semiespacio es convexo. Lo he representado en dos dimensiones: si dibujo una línea, lo que está a un lado de la línea es un semiespacio, y luego tengo otro semiespacio, la otra mitad de la línea. La línea misma no me importa, no es importante para lo que estoy diciendo.

Puedo hacer lo mismo en tres dimensiones: dibujo un plano aquí, y de un lado tengo un semiespacio y del otro, otro semiespacio. Los semiespacios son el conjunto convexo más simple y los entendemos extremadamente bien.

Si tomas una intersección de semiespacios, obtienes un conjunto convexo.

Esto lo he tratado de transmitir en la imagen: esta línea aquí define dos semiespacios, y el que marqué lo elimino.

Esa línea también define dos semiespacios, elimino ese.

Y hago esto para todas las líneas, y lo que queda en la parte blanca aquí en el medio es un conjunto convexo.

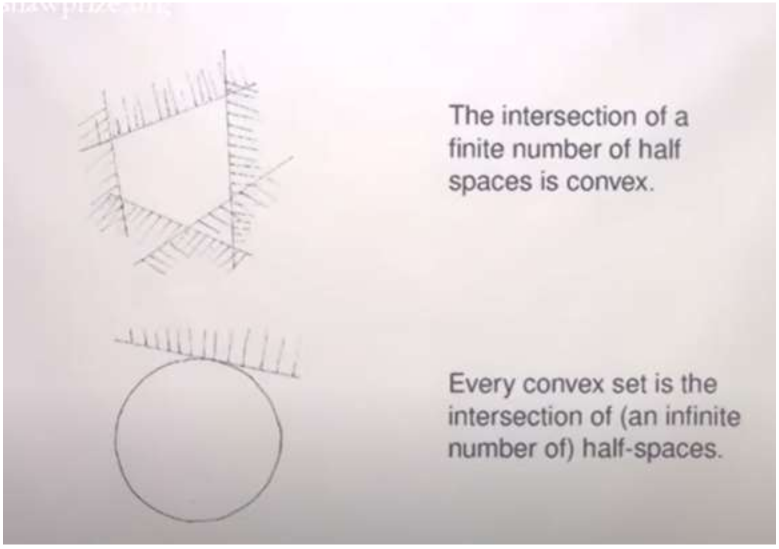
Más generalmente, es una propiedad general obvia desde la definición que una intersección de conjuntos convexos también es un conjunto convexo.

En particular, una intersección de un número finito de semiespacios.

Ahora, una propiedad interesante es, en cierto sentido, el contrario es cierto: cada vez que tengo un conjunto convexo, de hecho es una intersección de semiespacios.

He dibujado una imagen para explicar esto un poco.

Es una intersección de, lo siento, no presioné bien. Aquí he dibujado un semiespacio, ves este semiespacio, elimino toda esa parte aquí, y este semiespacio está tangente al círculo en un punto aquí.



Ahora, si hago lo mismo para cada punto del círculo, si dibujo la tangente y elimino lo que está fuera, solo queda el interior del círculo. Esencialmente, así es realmente la forma en que se prueba que un conjunto convexo es una intersección de semiespacios.

Así que los semiespacios, puedes pensar de esa manera, son el gran bloque con el que uno puede construir conjuntos convexos.

Ahora voy a pensar en un problema específico. Este problema vive en un espacio de dimensión, y me gustaría entender los conjuntos convexos que son grandes en cierto sentido. Ahora, ¿de qué manera son grandes?

Bueno, si tomo el conjunto convexo que quiero entender, lo llamo A, intersecta el conjunto convexo con la bola unitaria y miro qué proporción del volumen de la bola unitaria obtengo.

Así que decido, quiero un conjunto que comprenda casi toda la bola unitaria, digamos 3/4 del volumen.

No hay nada mágico en el número 3/4; podría tomar otro número, 5/5, solo para ser específico, algo será mayor que 1/2. Así que esa es mi idea de lo que es un conjunto convexo grande; comprende la mayor parte del volumen de la bola unitaria.

Ahora, solo me interesa la parte del conjunto convexo que está en la bola unitaria, por eso hago la intersección.

Tomo la parte del conjunto convexo que está dentro de la unidad y trato de entender los conjuntos convexos que tienen esa propiedad, que son grandes en ese sentido.

Ahora, tengo que simplificar la notación aquí porque esta relación de volumen la voy a usar varias veces, así que tengo que introducir una notación especial.

Ahora, esta relación de volumen es la proporción del volumen de la bola unitaria obtenida.

We would like to understand the convex sets A such that

$$\frac{\mathrm{vol}(A \cap B(1))}{\mathrm{vol} B(1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Here $A \cap B(1)$ is the part of A which is in $B(1)$.

Notation: for a region C of $\mathbb{R}^N$ we define

$$P(C) = \frac{\mathrm{vol}(C \cap B(1))}{\mathrm{vol} B(1)}$$

Here P stands for "proportion of the volume of the ball".

Our goal: investigating the convex sets A such that $P(A) \geq 3/4$.

Así que reformulo mi pregunta sobre conjuntos convexos: el objetivo es tratar de entender los conjuntos convexos para los cuales la proporción de A es mayor que tres cuartos del volumen de la bola unitaria.

Así que el programa de lo que voy a hacer es describir una clase especial de conjuntos que voy a describir como algo bastante concreto, que tienen la propiedad de que son grandes en el sentido que quiero, P de A es mayor que 3/4.

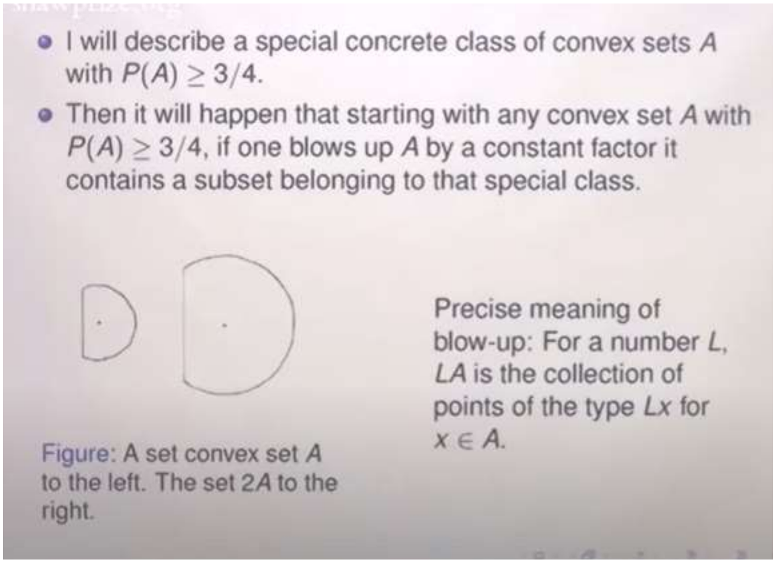
Ese será el primer paso de lo que voy a hacer. Y luego sucederá algo mágico.

El contenido del teorema es el siguiente: si empiezo con cualquier conjunto convexo que es grande en mi sentido, y si lo amplío por un factor constante, digamos mil, este conjunto convexo contiene algo mucho más simple que ya es grande.

Es un teorema estructural.

Veo que comienzo con cualquier objeto que puede ser muy complicado y muestro que de hecho no es complicado porque si lo agrando un poco, contiene algo que es de hecho mucho más simple.

Así que la complejidad no estaba ahí, la naturaleza es la misma y lo que piensas que es, esa es la naturaleza de la cosa. ¿Qué significa ampliar un conjunto convexo? Bueno, he hecho una imagen: si tengo un conjunto A, el conjunto que denoto por otro, aquí, el conjunto L A en la colección del tipo de punto L X para X un punto de A.

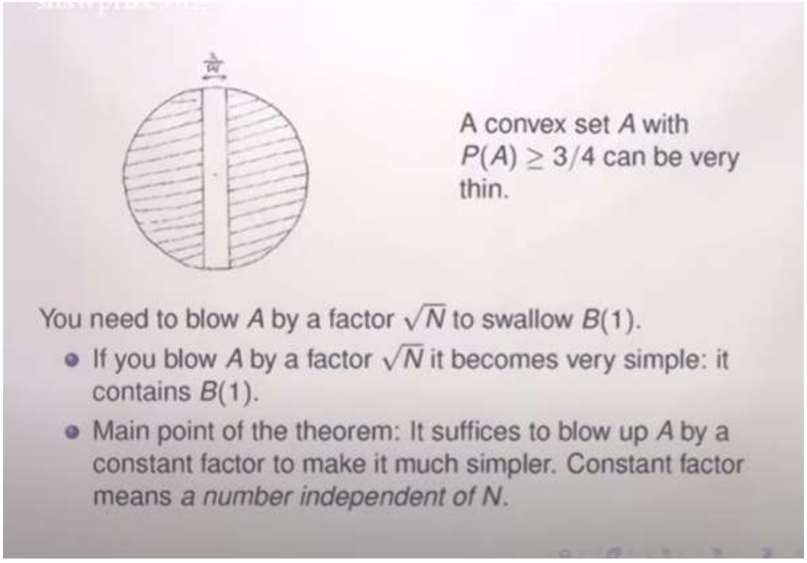


Eso está mejor ilustrado por una pequeña imagen a la izquierda aquí, he dibujado ese conjunto aquí, el punto es el origen y a la derecha lo amplié por un factor 2, eso es exactamente lo que es, es dos veces más grande en todas las direcciones, eso es lo que significa ampliar, solo lo multiplico por ahora.

Los asuntos son muy complicados porque cuando haces imágenes en dos dimensiones, son completamente propias.

Aquí he tratado de hacer una imagen para explicarte que en grandes dimensiones, el conjunto convexo que es grande en el sentido del volumen puede, por otro lado, ser muy delgado.

Mi conjunto convexo que estoy estudiando aquí es solo así, he dibujado solo la parte del conjunto convexo en la bola unitaria porque eso es lo único que me importa. Así que dibujé, tengo una primera línea aquí, eliminé toda esa parte y eliminé toda esa parte. Lo que queda, piensas, es una losa y la losa, el ancho que es 2 sobre la raíz cuadrada de n donde n es la dimensión del espacio,



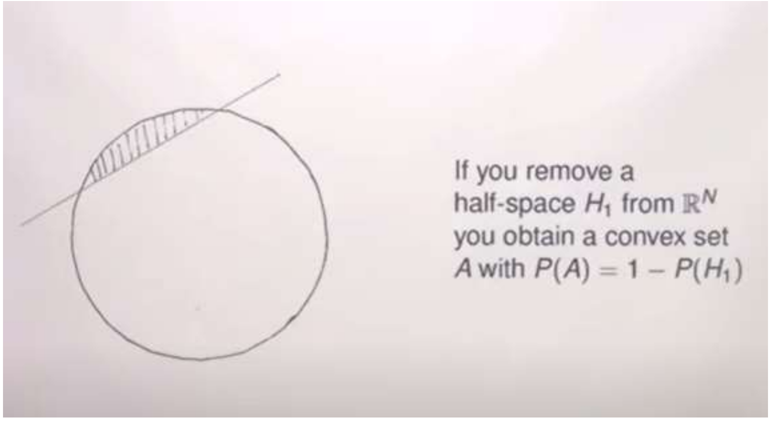
así que puedes calcular y puedes calcular en una dimensión ampliada hay algo extraordinario, es un cálculo simple, que esta losa aquí contiene la mayor parte del volumen de la bola, que por supuesto no es en absoluto lo que tus ojos ven en la imagen porque lo que también tienes que ver es que hago una imagen aquí, es 2 sobre la raíz cuadrada de n pero si n es igual a la dimensión de la imagen y el ancho aquí sería mucho más grande, no lo dibujé como sería para un n igual a 2.

Así que este conjunto convexo puede ser muy delgado, lo que significa que si quieres tragar toda la bola unitaria, debes ampliarlo por un factor aproximadamente igual a la raíz cuadrada de n, nada menos será suficiente.

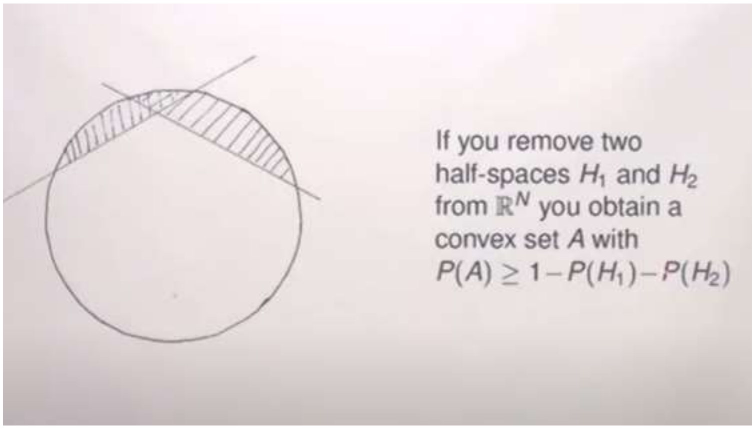
Entonces, si lo amplías por un factor raíz cuadrada de n, entonces el conjunto convexo que puedes pensar es muy simple, es la anti-bola, pero el punto del teorema será que de hecho no necesitas ampliarlo por un factor raíz cuadrada de n, necesitas hacer que el conjunto convexo sea mucho más simple, es suficiente ampliarlo por un factor que no depende de n, ese es el contenido del teorema.

Así que déjame explicar una forma de construir conjuntos convexos, bueno, expliqué que los semiespacios son los bloques de construcción principales, así que puedes comenzar por algo muy simple,

comienzas por V y Ty, necesitas más y eliminas un semiespacio. Entonces, hay todo un semiespacio aquí para ser eliminado, pero nuevamente, dibujé una imagen solo de lo que sucede dentro de la bola unitaria porque no me preocupo por el resto. Entonces, si elimino un semiespacio, me queda un conjunto convexo y ¿cuál es la proporción de la bola unitaria que conservo?



Bueno, la proporción es uno menos la proporción de lo que elimino. Ahora, ¿qué sucede si eliminas dos semiespacios? Bueno, si eliminas dos semiespacios, por supuesto, los asuntos se vuelven más complicados porque la pregunta es cuál es la proporción que queda. La proporción que queda es difícil de calcular exactamente porque cuando elimino el primer semiespacio, elimino esa parte, cuando elimino el segundo, elimino esa parte, pero hay un pequeño pedazo aquí en Colin que eliminé dos veces, así que el cálculo exacto sería complicado, pero tengo algo muy simple, la proporción de lo que queda es al menos uno menos la proporción de lo que eliminé la primera vez y luego la proporción de lo que eliminé la segunda vez. Aquí estoy siendo crudo, pero estoy haciendo algo muy muy simple porque la buena característica de ese modelo es que no se rompe, no depende de la posición relativa de los semiespacios.

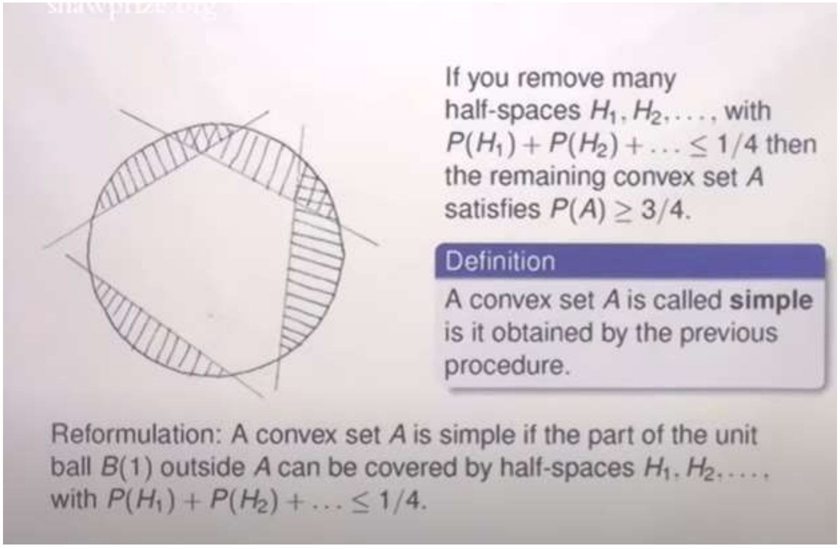


Okay, entonces, ¿qué sucede si elimino muchos semiespacios? Entonces, si elimino muchos semiespacios pero de una manera que la proporción de los puntos que están contenidos en el primer semiespacio más la proporción de los puntos que están contenidos en el segundo semiespacio más, así sucesivamente, la proporción de los puntos en los semiespacios, toda la suma de estos es menor que un cuarto, entonces lo que queda, lo que queda después de que elimino eso es la proporción de lo que queda es al menos 3/4.

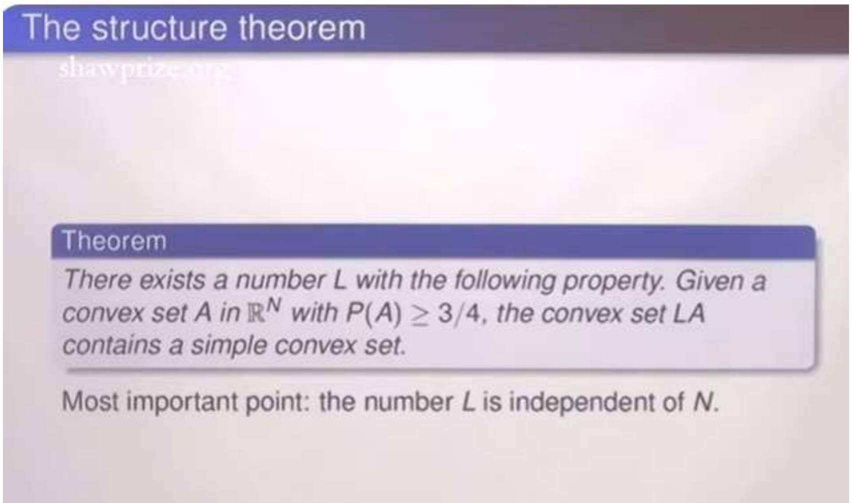
Así que, aplicando este procedimiento, te doy un procedimiento concreto para construir un conjunto convexo que tenga una proporción de al menos 3/4 de la bola.

Y este procedimiento simple es el siguiente: eliminas tantos semiespacios como quieras, siempre que la suma de la proporción de lo que eliminas cada vez sea menor que un cuarto.

Así que este conjunto convexo tengo que dar, cuando hago algo complicado, tengo que dar una definición para darle un nombre para poder hablar de él, y el conjunto convexo así lo llamaré un conjunto simple, un conjunto convexo simple y reformulación.



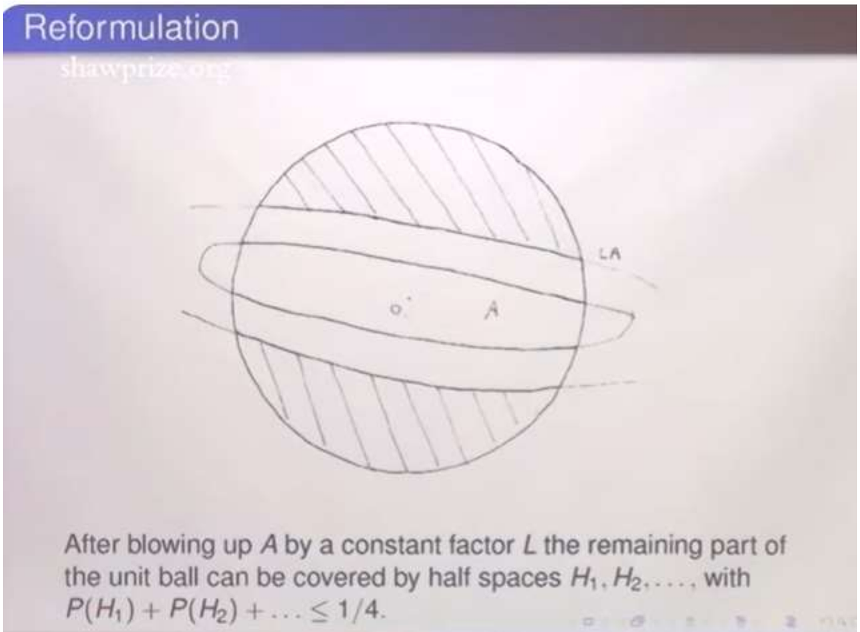
Entonces, un conjunto convexo será simple si la parte de la bola unitaria que está fuera del conjunto puede ser cubierta por semiespacios para que la suma de la proporción de estos semiespacios sea menor que un cuarto.



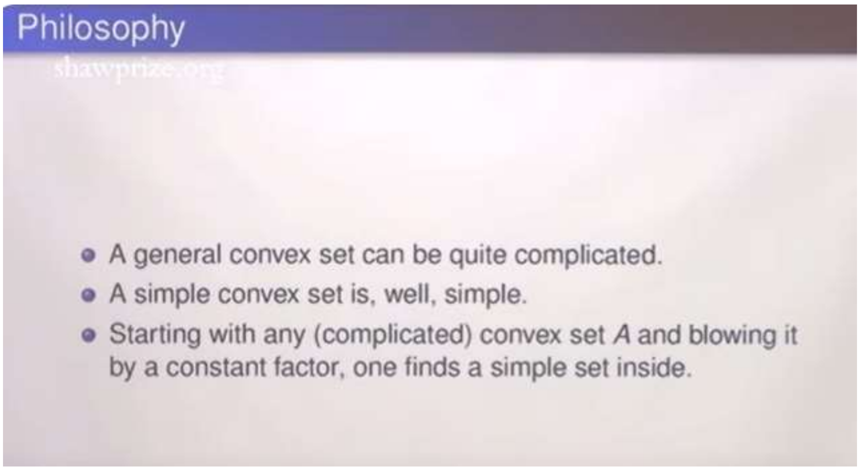
Y el teorema establece lo siguiente, dice que hay un número, ahora en este tipo de teorema no estamos interesados en los valores reales, lo que es importante es que este número es independiente de la dimensión, esa es la parte fundamental del teorema, así que este número C, este teorema es, así que comienzas con cualquier conjunto convexo que sea grande en el sentido que expliqué, y luego si lo amplías por este factor, contiene un conjunto simple que ya es grande. Así que en cierto sentido, dentro de la ampliación por un factor constante, obtienes una descripción completa de los conjuntos convexos grandes.

Así que ese es el tipo de teorema que a los matemáticos les gusta, les gusta entender realmente, en cierto sentido, un teorema como ese te da una comprensión completa. Así que, nuevamente, el punto importante es que haces cosas que son independientes de la dimensión.

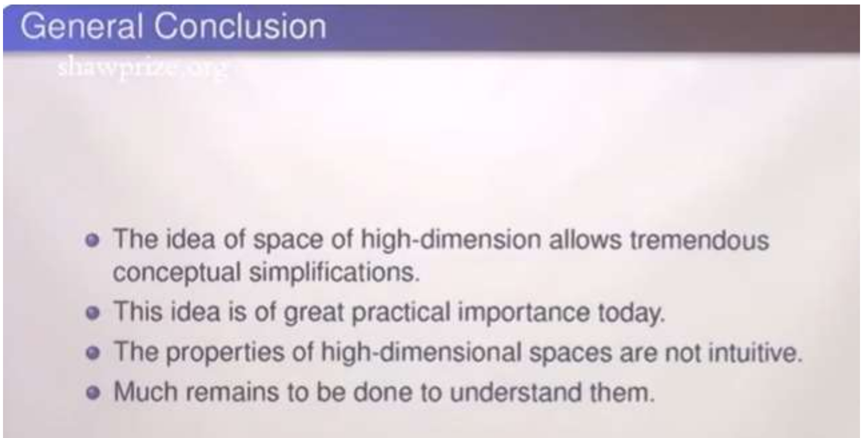
Así que he hecho aquí una imagen del póster que intenta ilustrar el procedimiento nuevamente.



Así que ese es el conjunto convexo original, que se llama A aquí, lo he ampliado por un factor constante, ves que tiene la misma forma pero es más grande, esa es parte de la bola unitaria que está fuera de LA está aquí, y esta parte del universo puede ser cubierta por semiespacios para que la suma de su proporción del volumen de la sobre el espacio sea menor que un cuarto, esa es la declaración del teorema.



Entonces, ¿qué pasa de nuevo? ¿Cuál es la filosofía del resultado? La filosofía es que un conjunto convexo general puede ser muy complicado, un conjunto convexo simple es, bueno, mucho más simple, pero el punto del teorema es que, comenzando con cualquier conjunto complicado y ampliándolo por un factor constante, puedo encontrar un conjunto simple dentro de él.



Okay, entonces la conclusión general de la charla, el concepto de espacio de alta dimensión implica una tremenda simplificación conceptual, esta idea es de gran importancia práctica y las propiedades del espacio de alta dimensión son absolutamente no intuitivas, pero por supuesto, sabes, cuando trabajas con algo durante años, terminas desarrollando algún tipo de intuición, pero que seguramente no es nuestra intuición física, y lo más importante es que es un tema muy bueno para entrar porque va a ser de creciente importancia y hay tantas cosas que quedan por hacer con él. Muchas gracias. [Aplausos]